PRÉSENTATION ANALYTIQUE DES TRAVAUX

par

Jacky Cresson

Ce texte donne une description de mes travaux dans les thèmes suivants :

1- Systèmes dynamiques,
2- Géométrie et analyse,
3- Théorie des nombres.

Les références renvoient à la liste des publications. J'ai indiqué en début de chaque partie les noms de mes principaux collaborateurs.

Table des matières

PARTIE I
SYSTÈMES DYNAMIQUES

1. Instabilité des systèmes hamiltoniens

L'essentiel de mon travail concerne l'étude des mécanismes d'instabilité dans les systèmes hamiltoniens. Je me suis principalement concentré sur la *diffusion d'Arnold* (ou instabilité topologique) dans les systèmes hamiltoniens proches intégrables et l'*instabilité modulationnelle de Chirikov.* Le mécanisme d'Arnold associé à la diffusion est basé sur l'existence de chaînes de tores partiellement hyperboliques appelés *tores moustachus.* On renvoie à l'article de Pierre Lochak [L] pour une revue du sujet, ainsi que des principales difficultés et problèmes. Mes contributions sont les suivantes :

1.1. Dynamique des tores partiellement hyperboliques. —

1.1.1. λ-lemme pour des tores partiellement hyperboliques. — [1],[4] : Le λ-lemme de Jacob Palis [P] décrit le comportement local de la dynamique au voisinage d'un point fixe hyperbolique. On peut étendre ce résultat pour un ensemble invariant compact normalement hyperbolique quelconque ([W],[C]). En suivant un premier travail de Jean-Pierre Marco [Ma] sur les tores 1-partiellement hyperboliques, j'ai démontré l'analogue du λ-lemma en toute généralité pour les tores partiellement hyperboliques. La difficulté tient à l'existence d'une direction non-hyperbolique, appelée *neutre* dans la suite, qui demande un contrôle particulier. Contrairement au cas normalement hyperbolique, le cas partiellement hyperbolique fait intervenir la dynamique sur l'objet invariant.
Ce lemme permet de démontrer que les tores moustachus possèdent la *propriété d'obstruction* introduite par Arnold [A].

1.1.2. Dynamique symbolique. — [2],[9] : Le théorème de Smale-Birkhoff [W] permet de démontrer l'existence, au voisinage d'un point fixe hyperbolique homocline transverse, d'un ensemble invariant I sur lequel la dynamique est conjuguée à un décalage de Bernoulli à un nombre fini (ou infini [M]) de symboles. Stephen Wiggins a étendu ce théorème au cas des tores normalement hyperboliques (voir aussi [C] pour une correction). En suivant un premier travail de Robert Easton [Ea], j'ai étendu ce théorème au cas des tores partiellement hyperboliques. L'existence de cette dynamique symbolique, sur un alphabet explicite, lie la dynamique sur le tore et la transversalité des variétés stable et instable du tore via le phénomène de *transversalité-torsion* décrit plus loin.
On peut ainsi démontrer l'existence au voisinage d'une chaîne de tores partiellement hyperboliques, d'une chaîne duale d'orbites hyperboliques, a priori un objet plus robuste

sous les perturbations. Cette chaîne duale donne la clef du calcul optimal du temps de diffusion. Par ailleurs, on démontre ainsi une conjecture de Holmes-Marsden sur l'existence d'orbites périodiques de période arbitrairement longues le long de la chaîne.

1.1.3. Phénomène de transversalité-torsion (création d'hyperbolicité). — [2],[9],[25] : Dans son article sur la dynamique symbolique pour des tores partiellement hyperboliques [Ea], Easton a une hypothèse forte sur la partie linéaire de l'application homocline. Il conjecture néanmoins que cette hypothèse peut être affaiblie, voir supprimée. J'ai dans un premier temps affaibli cette hypothèse et travaillé en classe analytique (Easton est en classe C^∞ ce qui supprime pas mal de difficultés). Avec Christophe Guillet, nous avons démonré la conjecture d'Easton pour les systèmes hamiltoniens à 3 degrés de liberté. La démonstration nécessite le résultat suivant, appelé *phénomène de transversalité-torsion* : il existe une dynamique hyperbolique au voisinage du tore partiellement hyperbolique si et seulement si le flot sur le tore est avec torsion et les variétés stable et instable du tore se coupent transversalement. On conjecture que le résultat est encore vrai en dimension supérieure.
Notons au passage que les méthodes variationnelles construisent des orbites justement dans un voisinage de la chaîne (contrairement aux méthodes géométriques standard). On peut se demander dans quelle mesure la possibilité d'un principe de minimisation au voisinage de la chaîne partiellement hyperbolique est liée à la présence d'une dynamique hyperbolique.

1.2. Temps d'instabilité. —

1.2.1. Le lemme de transfert. — [7],[8] : Le lemme de transfert peut être considéré comme une version quantitative fine du λ-lemme. Il prend en compte la taille du splitting s entre une variété Δ et la variété stable pour estimer un temps suffisant d'intersection d'un itéré de Δ avec une variété transverse à la variété instable de splitting s. Là encore, les difficultés sont liées à la présence de directions neutres.

1.2.2. Estimation optimale du temps d'instabilité dans le cas initialement hyperbolique. — [10] : La dynamique symbolique fournit une chaîne duale d'orbites périodiques le long de la chaîne de tores partiellement hyperboliques. Nous avons utilisé cette chaîne pour calculer un temps d'instabilité. Le caractère hyperbolique des orbites périodiques permet d'obtenir le temps optimal [BB] dans le cadre initialement hyperbolique. Il donne aussi une relation claire entre le splitting des variétés, les propriétés ergodiques du flot sur les tores et le temps de diffusion.

1.2.3. Conjecture de Chirikov et théorème de Nekhoroshev. — [27] : La méthode précédente basée sur la construction des chaînes duales d'orbites périodiques est difficile à généraliser au cas proche intégrable. Par contre, la méthode du lemme de transfert s'adapte immédiatement et permet de démontrer que le temps de diffusion est proportionel au splitting des variétés, ce qui était une conjecture de Chirikov. Pour les systèmes hamiltoniens à trois degrés de libertés, en utilisant des travaux de Rudnev et Wiggins [RW] et Delshams-Seara [DS] d'autre part, on démontre l'optimalité des exposants du théorème de Nekhoroshev-Lochak le long d'une résonance simple dans le cas quadratique et linéaire.

1.3. Diffusion d'Arnold et Chirikov. —

1.3.1. Nouveau mécanisme d'instabilité. — [3] : Le mécanisme d'Arnold n'est pas générique. Le problème principal est connu sous le nom de "gaps problem", i.e. le problème de connexion entre les tores partiellement hyperboliques obtenus le long des résonances. En 1998, j'ai proposé un mécanisme permettant de contourner ce problème. Il est basé sur l'ensemble invariant normalement hyperbolique dans lequel vivent les tores partiellement hyperboliques et le fait que la dynamique sur cet ensemble invariant est conjuguée à un difféomorphisme de l'anneau avec torsion dans le cas à 3 degrés de liberté. On peut alors utiliser les orbites d'instabilité de Birkhoff et le phénomène de transversalité-torsion pour construire une orbite le long des résonances. De nombreuses difficultés techniques subsistent.

1.3.2. Description de l'instabilité modulationnelle de Chirikov. — (avec Christophe Guillet (IUT Chalon sur saône)) : Nous avons étudié l'instabilité modulationnelle des systèmes hamiltoniens introduite par Chirikov [Ch]. Cette instabilité est beaucoup plus sauvage que l'instabilité d'Arnold et se développe sur des temps beaucoup plus courts. En contre partie, cette instabilité n'est pas asymptotique en fonction du paramètre perturbateur. Nous avons donné une démonstration rigoureuse de plusieurs résultats heuristiques de Chirikov. En particulier, nous avons explicité les seuils d'existence et de co-existence de la diffusion d'Arnold et de la diffusion modulationnelle.

Références

[BB] Berti M, Bolle P, Diffusion time and splitting of separatrices for nearly integrable isochronous Hamiltonian systems, preprint, 2000.

[Ch] Chirikov B, Lieberman M, Shepelyansky D, Vivaldi M, A theory of modulational diffusion, Physica D (1985), 289-304.

[C] Cresson J, it Instabilité des systèmes hamiltoniens proches intégrables, Thèse, 188.p, 1997.

[Ea] Easton R, Homoclinic phenomena in Hamiltonian systems with several degrees of freedom, Journal of Differential Equations 29, 241-252, (1978).
[L] Lochak P, Arnold diffusion : a compendium of remarks and questions, in *Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom*, C. Simò ed, NATo Adv. Ser, Vol. 533, 168-183 (1999).
[M] Moser J, *Stable and random motions in dynamical systems (with a special emphasis in celestial mechanics)*, Ann. Math. Stud. 77, Princeton Univ. Press, 1973.
[Ma] Marco J-P, Transition le long des chaînes de tores invariants pour les systèmes hamiltoniens analytiques, Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique, Vol. 64 (2), 205-252 (1996).
[P] Palis J, On Morse-Smale dynamical systems, Topology 8 (1969), 385-405.
[DS] A. Delshams, V. Gelfreich, A. Jorba, T.M. Seara, Exponentially small splitting of separatrices under fast quasi-periodic forcing, Commun. in Math. Phys., (1998).
[RW] Rudnev M, Wiggins S, Existence of exponentially small splittings and homoclinic connections between whiskered tori in weakly hyperbolic near-integrable Hamiltonian systems, Physica D, 1998.
[W] Wiggins S, *Global bifurcation and chaos*, Springer 1988.

2. Non-intégrabilité analytique

Jürgen Moser a démontré dans le cas du plan, que l'existence d'un point fixe hyperbolique dont les variétés stable et instable se coupent transversalement est analytiquement non-intégrable. L'extension de ce résultat en dimension quelconque pose de nombreux problèmes, surtout si on se contraint à suivre la démonstration initiale de Moser [M] basée sur la structure complexe de l'ensemble invariant obtenu via le théorème de Smale-Birkhoff. Mes contributions sont les suivantes :

2.1. Nouvelle méthode de démonstration du théorème de Moser. — [5],[6],[11] : Le point de départ est de remarquer que la démonstration de Moser ne necessite pas l'existence d'un ensemble invariant hyperbolique sur lequel la dynamique est conjuguée à un shift de Bernoulli. Les seuls ingrédients nécessaires sont la transversalité des variétés stable et instable. L'idée est de démontrer l'annulation des dérivées succesives de l'intégrale première. Pour cela, on doit démontrer qu'une fonction analytique s'annulant sur les itérés d'un point homocline générique est identiquement nulle. C'est le *lemme de trivialité*. Ce résultat impose une dynamique non résonante sur les variétés stable et instable, ainsi qu'une dynamique ergodique sur l'objet invariant. On obtient ainsi, lorsque les valeurs propres ne dépendent pas du point sur l'objet, un théorème de non-intégrabilité analytique.

2.2. Conjecture de non-intégrabilité analytique. — Dans le cas où les valeurs propres dépendent du point (i.e. la non réductibilité de la dynamique sur l'objet), on conjecture sous les mêmes hypothèses, la non intégrabilité analytique. Pierre Lochak a suggéré d'utiliser le théorème ergodique multiplicatif d'Oseledec pour aborder ce cas. Pour le moment, seul le cas diagonalisable (non générique) semble se traiter de la même façon.

2.3. Généralisation du théorème de Poincaré pour le problème restreint elliptique plan des 3 corps. — Le théorème de Moser s'étend non seulement aux ensembles invariants compacts normalement hyperboliques, mais aussi aux tores partiellement hyperboliques des systèmes Hamiltoniens. Or Xia [X] avait annoncé, suite à sa démonstration de l'existence de tores invariants partiellement hyperboliques dans le problème restreint elliptique plan des 3 corps, la non intégrabilité analytique de ce problème. Ces arguments étaient malheureusement faux. En utilisant nos résultats, on obtient une démonstration complète, généralisant ainsi un théorème de Poincaré sur le problème des 3 corps.

Références

[M] Moser J, *Stable and random motions in dynamical systems (with a special emphasis in celestial mechanics)*, Ann. Math. Stud. 77, Princeton Univ. Press, 1973.
[X] Xia J, Arnold diffusion in the elliptic restricted three-body problem, J. Dynamics and Differential equations 5(2), 1993.

3. Théorie des formes normales, calcul moulien et problème du centre

Le *problème du centre* consiste à caractériser les perturbations polynomiales d'un centre dans le plan, dont la dynamique est localement conjuguée à un centre. J'ai abordé ce problème en collaboration avec Bertrand Schuman (Paris 6) via la théorie des formes normales. Nous avons utilisé le formalisme des moules de Jean Ecalle pour étudier la structure de ces formes normales. Par ailleurs, dans le cas des centres dits *isochrones*, le problème du centre est équivalent à trouver les conditions de *linéarisation* du champ perturbé. Mes contributions sont les suivantes :

3.1. Problème du centre. — (avec Bertrand Schuman (Paris 6)) [12],[13],[14]

3.1.1. Structure algébrique des variétés du centre. — En utilisant la théorie des formes normales, nous avons démontré que les variétés du centre (ensemble des coefficients de polynômes de degré fixé par exemple, donnant naissance à un centre) sont des variétés algèbriques, invariantes sous une action explicite de $\mathbb{C}^*$. Par ailleurs, l'utilisation du calcul moulien permet d'isoler dans les polynômes définissant ces variétés, ce qui est universelle (les moules) de ce qui ne l'est pas (les comoules). Un autre intérêt provient de l'implémentation simple de cette méthode.

3.1.2. Conjecture sur les relations du centre. — L'action explicite de $\mathbb{C}^*$ munit la variété du centre d'une structure torique. En suivant alors un travail de Eisenbud et Sturmfeld [ES], on peut affirmer que cette variété est une variété binomiales, ce qui donne le type de relations de centre à attendre.

3.1.3. Conditions d'obstruction à la linéarisation. — En utilisant la correction introduite par Ecalle et Vallet [EV], j'ai donné une description explicite des variétés du centre isochrone. Par ailleurs, en introduisant une classe particulière de champs, appelés *à dépendance linéaire*, et contenant entre autre les champs Hamiltoniens, j'ai démontré qu'il existait des obstructions de nature purement algèbrique à la linéarisation. Autrement dit, l'isochronisme hamiltonien n'a rien de spécifique.

3.2. Théorie des formes normales. —

3.2.1. Calcul moulien. — [26] J'ai écrit une monographie sur le calcul moulien. Ce livre replace le calcul moulien ainsi que les différentes symétries et opérations sur les moules, dans le cadre de la combinatoire des algèbres de lie libre. L'opération de composition est ainsi interprétée comme la substitution des séries formelles dans un cadre non commutatif gradué.

Références

[ES] Eisenbud D, Sturmfeld B, Binomials ideals, Duke Math journal, 84(1), 1-45, 1996.
[EV] Ecalle J, Vallet B, Correction and linearization of resonant vector fields and diffeomorphisms, Math Z, 229 (1998), 249-318.

4. Stochastisation des systèmes dynamiques

(avec Sébastien Darses) [28]

La mécanique classique utilise le calcul différentiel comme outil mathématique de modélisation. Or, en mécanique céleste par exemple, il est clair que les équations du problème des n-corps, comme modélisation du mouvement des planètes autour d'une étoile, sont des approximations. On peut penser qu'une meilleure adéquation des équations avec la nature serait obtenue en considérant une "perturbation stochastique" [M]. On peut aussi considérer que les seuls résultats pertinents obtenus via les équations classiques sont ceux qui sont stables sous ces perturbations stochastiques.

4.1. Stochastisation des systèmes dynamiques. —

4.1.1. Nouvelle méthode de plongement des EDO et EDP en stochastique. — En utilisant les travaux d'Edward Nelson [N] sur la dynamique du mouvement Brownien, nous avons construit un nouvel opérateur sur les processus stochastiques de Nelson, appelé *dérivée stochastique*. Cet opérateur est à valeur complexe et se recolle à la dérivée classique sur les processus déterministes différentiables. Si on note D cet opérateur, alors la partie réelle de $D \circ D$ coincide avec le choix arbitraire de Nelson pour son accélération [N].
A tout opérateur différentiel classique, on peut alors associer de manière unique un opérateur stochastique. On définit donc un plongement naturel d'une équation différentielle ou d'une EDP. Ce plongement est tel que sur les processus déterministes différentiables, on obtient un recollement aux équations différentielles ou EDP classiques.

4.1.2. Calcul des variations stochastiques. — Nous avons ensute appliqué la procédure de stochastisation aux systèmes Lagrangien. Le relevement d'un lagrangien donne une fonctionnelle stochastique. En suivant les travaux de Yasue [Y], nous avons développé le calcul des variations stochastiques associé à notre procédure. Nous obtenons ainsi un analogue des équations d'Euler-Lagrange (EL) appelées équations d'Euler-Lagrange stochastique (ELS).

4.1.3. Lemme de coherence pour les systèmes Lagrangiens. — La procédure de stochastisation peut s'appliquer directement à l'équation d'Euler-Lagrange classique. On obtient ainsi un second analogue de (EL), à savoir $stoc(EL)$ où $stoc$ désigne cette procédure. Le lemme de cohérence affirme que $stoc(EL) = (ELS)$. Ce lemme conforte notre construction du relévement stochastique des EDO et EDP. De plus, on démontre que l'(ELS) est associée à une équation de Schrödinger non linéaire. Je souligne ce point car une question parmis d'autres est de savoir si d'autres EDP classiques de la physique s'obtiennent via un principe de moindre action stochastique.

4.1.4. Théorème de Noether stochastique et notion d'intégrale première stochastique. — En suivant les travaux de Yasue [Y], nous avons démontré un analogue du théorème de Noether. Ce résultat est important car il nous dit que les intégrales premières du système lagrangien se "conserve" dans le cas stochastique. Ce travail permet aussi de définir une bonne notion d'intégrale première.

4.1.5. Géométrie symplectique stochastique. — Le lemme de cohérence suggère l'introduction de l'analogue de la structure symplectique en stochastique. Ce travail est possible en suivant les premiers travaux de Misawa et Yasue [MY]. On obtient ainsi l'analogue stochastique des systèmes hamiltoniens. Les perspectives sont nombreuses, par exemple si on considère des systèmes hamiltoniens proches intégrables on peut se poser la question d'un bon analogue du théorème KAM ou de la théorie d'Aubry-Mather.

4.2. Applications à la physique. — (avec Christophe Biernacki et Stéphane Chrétien) [29]

4.2.1. Loi de répartition des planètes autour d'une étoile. — En suivant les travaux de Nottale [N] et Blanchard [B], nous avons modélisé la dynamique dans la nébuleuse protoplanétaire par un système Lagrangien stochastique correspondant au relèvement stochastique du problème des 2 corps. On obtient ainsi une équation de Schrödinger dont la densité de probabilité prévoit la répartition de la masse dans la nébuleuse. On obtient alors une loi de répartition de ces pics de densité, que nous identifions ensuite à la position possible d'une planète. Si on note a_n les demis grand-axes de ces planètes, on a $a_n = Cn^2$, où C est une constante dépendant du système.

4.2.2. Méthodes statistiques et loi de répartition. — Le problème à résoudre est de déterminer la constante C pour des systèmes d'exoplanètes connus, en particulier pour le système solaire. Ce problème est difficile car on ne connait pas les places n_i des i planètes du système solaire par exemple, et de plus, on peut choisir a priori des n aussi grand qu'on veut (obtenant ainsi une meilleure approximation des données par la loi). Ces questions ont données lieu à un travail de C. Biernacki et S. Chretien dont les premiers résultats sont prometeurs.

Références

[B] Blanchard, Ph., 1984, Acta Phys. Austr., Suppl. XXVI, 185

[M] Mumford D, The dawning of the age of stochasticity, in *Mathematics : Frontiers and perspectives*, V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, B. Mazur editors, AMS, 2000, 197-218.

[MY] Misawa T, Yasue K, Canonical stochastic dynamical systems, J. Math. phys. 28(11), 1987.

[Ne] Nelson E, *Dynamical theory of Brownian motions*, Princeton, 2d ed, 2001.

[No] Nottale L, *Fractal space-time and microphysics*, World Scientific, 1993.

[Ya] Yasue K, Stochastic calculus of variations, J. Funct. Analysis, 41, 327-340 (1981).

5. Équations différentielles à retard

(avec Olivier Eveilleau et Laurent Larger (LOD))

Le Laboratoire d'optique Duffieux à Besançon développe des systèmes de cryptage par Chaos de signaux analogiques ou numériques. Leurs expériences en optique conduise à l'étude d'équations différentielles à retard. Ils observent des bifurcations qu'ils justifient en partie par l'utilisation d'un analogue discret des équations différentielles associées. Mes contributions sont les suivantes :

- Justification du passage continue/discret
- Justification des bifurcations observées

PARTIE II
GÉOMÉTRIE ET ANALYSE

6. Autour du calcul fractionnaire

(avec Fayçal Ben Adda (Hail Univesrity, Arabie saoudite))[15],[16],[20]

Le calcul fractionnaire (sous toute ses formes) est un outil classique dans le monde des ingénieurs. Il est aussi utilisé pour étudier les fonctions et autres objets non différentiables. Mes contributions sont les suivantes :

6.1. Calcul fractionnaire locale (après Kolvankar et Gangal). — La dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville par exemple, n'est pas une dérivation. Par ailleurs, son interprétation géométrique est loin d'être claire. Kolvankar et Gangal [KG] avait introduit une notion de localisation de la dérivée de Riemann-Liouville (RL), construisant ainsi une dérivée (RL) locale. Avec F. Ben Adda nous avons obtenu une nouvelle forme de cet opérateur beaucoup plus maniable, et exploré ses propriétés. On a ainsi démontré un analogue du développement de Taylor dans le cas fractionnaire.

6.2. Nouvelle présentation du calcul fractionnaire de Riemann-Liouville. — Afin d'avoir une meilleure interprétation de la dérivée de Riemann-Liouville, on peut la chercher comme solution à un problème d'extension du calcul différentiel classique sur les distributions. En suivant une présentation de Laurent Schwartz [S], on démontre ainsi que l'opérateur de Riemann-Liouville est le seul opérateur linéaire, continue à interpoller continuement la dérivée usuelle. Cette présentation a l'avantage de toute de suite montrer le caractère hautement non géométrique de cet opérateur et de délimiter son champ d'application, à savoir toutes les équations de convolutions.

6.3. Etude des équations différentielles fractionnaires locales. — Nous avons étudié les équations différentielles fractionnaires locales et démontré principalement des résultats de non existence. Ces résultats négatifs traduisent le fait que l'opérateur est la plupart du temps nul sur les fonctions génériques, ce qui limite son champ d'application à un traitement local des fonctions. Cette étude a permis de démontrer l'impossibilité d'obtenir une équation de Schrödinger linéaire dans le cadre de la théorie de la relativité d'échelle basée sur le calcul fractionnaire locale.

7. Géométrie et analyse de la non-différentiabilité

(avec Fayçal Ben Adda (Hail Univesrity, Arabie saoudite) et Sébastien Darses)

Les propriétés géométriques des fonctions non différentiables sont difficiles à capter, faute entre autre, d'une extension du calcul différentiel de nature géométrique. Par ailleurs, les applications physiques demandent le développement d'outil d'analyse d'objets (en particulier les surfaces) non différentiables. Mes contributions sont les suivantes :

7.1. Fonctions non différentiables et extension du calcul différentiel. — [18],[19]

7.1.1. Calcul d'échelle. — Le calcul d'échelle étend le calcul différentiel sur les fonctions non différentiables. L'idée principale est celle de *résolution minimale*, qui donne une mesure de la non régularité de la fonction via la divergence des dérivées moyennes droite ou gauche. Les non différentiabilités typiques sont de résolution minimale non nulle. On est donc naturellement conduit à un calcul de type différences finies. Le recollement au calcul différentiel classique et la nécessité que la quantité calculée permette la reconstruction locale de la fonction conduisent à un opérateur complexe, la partie imaginaire de l'opérateur matérialisant la non différentiabilité. Ce calcul fournit un outil pratique d'étude des objets non différentiables. Sa simplicité permet de plus de faire bon nombre de calculs.

7.1.2. Calcul des variations non différentiable. — [21]. J'ai développé un calcul des variations non différentiable, i.e. pour des fonctionnelles sur des espaces de fonctions non diférentiables. Les équations d'Euler-Lagrange ainsi obtenues sont, à peu de choses près, les mêmes que celles postulées par Nottale [N] en relativité d'échelle. Sur un plan strictement mathématique, ce principe variationnelle non différentiable offre une connexion intéressante avec les EDP (comme Schrödinger par exemple).

7.2. Géométrie non différentiable. — [31],[32]

7.2.1. Notion de système de coordonnées fractal. — Un cadre naturel pour la relativité d'échelle de Laurent Nottale [N] est celui des variétés topologiques. Nénmoins, tout calcul quantitatif sur ces objets demande une description explicite de ces objets, donc des hypothèses la plupart du temps non falsifiables au niveau de la physique. Une idée consiste donc à construire un modèle de variété prenant en compte les principales propriétés de la non différentiabilité. Une manière de faire est de construire un analogue, appelé fractal, de $\mathbb{R}^n$: on regarde les propriétés des systèmes de coordonnées curvilignes construis sur un produit de courbes non différentiables. Une notion importante apparait : celle de *loi d'échelle*, qui décrit l'évolution des systèmes de coordonnées curvilignes suivant des approximations différentiables des courbes. Afin d'avoir une notion indépendante du choix des courbes sous-jascentes, on définit alors un système de coordonnées fractales de manière abstraite, comme une famille à un paramètre de systèmes de coordonnées, dont la dépendance en fonction du paramètre est contrôlée par une loi d'échelle linéaire.

7.2.2. Variétés fractales et géométrie d'échelle. — L'abstraction des systèmes de coordonnées fractales permet de définir sans problème la notion de variété fractale, qui fournit un cadre naturel pour la relativité d'échelle restreinte.

8. Applications

(avec Fayçal Ben Adda (Hail Univesrity, Arabie saoudite))

Mes travaux trouvent leurs sources dans la théorie de la *relativité d'échelle* développée par Laurent Nottale à l'Observatoire de Meudon. Les applications concernent donc principalement cette théorie. Mes contributions sont les suivantes :

8.1. Équation de schrödinger non linéaire. — [21] : J'ai démontré qu'une équation de Schrödinger non linéaire peut s'obtenir comme solution d'un principe de moindre action non différentiable. Le point important est que la forme de la non linéarité n'est pas libre, mais contrainte et explicite.

8.2. Fondation mathématique de la relativité d'échelle restreinte. — [17],[31] : La géométrie d'échelle fournit un cadre mathématique clair dans lequel dériver la théorie de la relativité d'échelle restreinte. Sous l'hypothèse que les processus physiques vivent dans un espace-temps-echelle fractal (le sens à donner à ce mot étant celui indiqué plus haut), et sous certaines hypothèses sur les classes d'équivalence des référentiels d'échelle, on démontre complètement les équations obtenues par Nottale. Il reste néanmoins beaucoup de travail pour obtenir une formulation propre de la relativité générale d'échelle.

Références

[KG] Kolvankar K, Gangal A.D, Local fractional derivatives and fractal functions of several variables, dans *Fractals in Engeneering*, 1997.

[N] Nottale L, *Fractal space-time and microphysics*, World Scientific, 1993.

[S] Schwartz L, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.

PARTIE III
THÉORIE DES NOMBRES

9. Fractions continues et physique des oscillateurs

(avec Jean-Nicolas Dénarié et Michel Planat (LPMO)) [22],[23],[24],[34]

Michel Planat du laboratoire de Métrologie des oscillateurs effectue des expériences sur les mélangeurs qui permettent d'étudier le *bruit en 1/f*. Mes contributions sont les suivantes :

9.1. Dynamique des nombres et fractions continues. — Nous avons repris la construction des fractions continues à quotients partiels bornés, afin de mettre en relief les propriétés dynamiques extrémement riches de ces ensembles. Le paramètre controlant la profondeur des quotients, s'interprète comme une limite naturelle de résolution des nombres réels. Cette limitation induit une quantification, qui se traduit notamment par l'apparition de zônes d'accrochage des nombres rationnels, et l'instabilité de certains irrationnels. Plusieurs notions arrivent en bloc dans cette étude, notamment celle d'exposant de stabilité, liée aux propriétés d'approximation diophantienne des nombres. L'espace $\mathbb{R}$ possède alors une propriété remarquable, celle d'être amorphe, en gommant toute la dynamique sous-jascente dès qu'une résolution est fixée. L'espace réel donne le même poids à tous les nombres, ce qui n'est pas possible dans le cadre d'une résolution finie, posant ainsi de nombreux problèmes de calculs notamment.

9.2. Justification théorique du spectre expérimental des fréquences. — Il est possible de généraliser la notion d'ensemble de fractions continues bornées en autorisant la résolution à dépendre des rationels considérés. On obtient ainsi des espaces de résolution dont la structure coincide avec les données expérimentales du spectre des fréquences d'un mélangeur d'oscillateur. Ce résultat donne le premier exemple expérimental électronique "faisant" de l'approximation diophantienne intrinséquement.

10. Approximation diophantienne des polyzêtas

(avec Tanguy Rivoal (CR, Caen) et Stéphane Fischler (Paris 11)) [35],[36],[38]

Les intégrales de type Sorokin ou Beukers utilisées en approximation diophantienne des nombres zéta, se décomposent naturellement en ce qu'avec Tanguy Rivoal nous appelons "briques". Afin de trouver des bonnes combinaisons linéaires des nombres zéta, il est important d'avoir des algorithmes de décomposition de ces objets sur les polyzêtas. Mes contributions sont les suivantes :

10.1. Mise au point d'un algorithme de décomposition des briques. — Nous avons mis au point un algorithme de décomposition des briques suivant les polyzêtas larges. Cet algorithme a été implémenté par Stéphane Fischler. Nous conduisons actuellement des expériences numériques pour mettre au point une bonne notion de série bien équilibrée à plusieurs variables.

10.2. Étude des intégrales de Sorokin. — Avec Tanguy Rivoal, nous avons mis en évidence des phénomènes de compensations analytiques expliquant la disparition de certains zêta dans les développements des intégrales de Sorokin. On espère ainsi une meilleure compréhension des constructions de "bonnes" intégrales.

11. Combinatoire des polyzêtas

La combinatoire des polyzêtas ainsi que la structure de l'algèbre associée ont été recemment explorée par Jean Ecalle. Il démontre plusieurs conjectures et donne des pistes pour d'autres. Mes contributions sont les suivantes :

11.1. Formules de passage explicites et algorithmiques entre les polyzêtas stricts, larges et pondérés. — La décomposition des briques se fait naturellement sur les polyzêtas larges et non les polyzêtas stricts. J'ai obtenu une formule simple de passage entre ces deux quantités faisant intervenir la composition moulienne par un moule constant égal à 1. Cette formule suggère l'introduction d'une autre quantité, à savoir les polyzêtas pondérés, obtenus en composant avec le moule exponentiel. L'intérêt de cette opération est que la symétrie vérifiée par les polyzêtas pondérés est la classique symétrie de battage, beaucoup moins complexe que la symétrie de battage contractant vérifiée par les polyzêtas stricts. Les polyzêtas larges se situent en fait entre les deux, et on peut ainsi définir une famille d'interpolation entre les polyzêtas pondérés et stricts, passant par les larges, et offrant une large panoplie de symétries déformées.

11.2. Mise au claire des relations entre régularisation combinatoire et analytiques des polyzêtas. — En reprenant les travaux de Georges Racinet [R], j'ai explicité le lien entre les procédés de régularisations combinatoire et analytique des polyzêtas.

Références

[R] Racinet G, *Série génératrices non-commutatives de polyzêtas et associateurs de Drinfel'd*, Thèse de l'Université de Picardie, 2000.

À Besançon, Mars 2005.

Jacky Cresson