# DES LOIS DE KEPLER AUX LOIS DU CHAOS

*par*

Jacky Cresson

**Table des matières**

## 1. Introduction

Le but de cours est d'étudier l'évolution de la notion de loi de la nature à travers l'histoire. Ce faisant, nous verrons comment la physique, la philosophie et les mathématiques en ont profondément bouleversé la définition. Le second but du cours est de formuler un certains nombres de problèmes liés à cette recherche des lois de la nature, en particulier une série de problèmes mathématiques qui couvrent des domaines très différents comme les statistiques, les probabilités, les systèmes dynamiques, la logique.....

Aujourd'hui les lois de la nature sont de différents types, mais toutes cherchent à énoncer des régles (ou régularités) universelles à partir de données plus ou moins accessibles. Notons au passage que nous venons de formuler une définition très vague de loi de la nature et que celle ci ne recouvre pas forcemment l'ensemble des lois, ou qui sont considérées comme telle, aujourd'hui. Il existe d'importants travaux philosophique sur la notion de loi de la nature et sur la recherche d'une définition adéquate. La première question que nous aborderons est donc:

*Qu'est-ce qu'une loi de la nature ?*

Ce faisant, nous verrons que la reflexion physique et philosophique conduit à des questions mathématiques plus ou moins bien formalisées. Il y a là à mon avis de quoi faire. Nous allons découper notre reflexion en deux parties suivantes:

i- Une loi étant donnée comment faire pour lui conférer le statut de loi de la nature ?

ii- Comment fabriquer une loi ou savoir qu'une loi existe pour un phénomène donné ?

Ces deux questions émaillent l'histoire des sciences depuis son début. J'illustrerai ces différentes questions à partir d'un seul et même exemple, toujours d'actualité. Ce problème est celui de l'existence d'une loi de répartition des planètes autour d'une étoile. Autrement dit, une étoile étant donnée, peut-on a priori savoir à quelle distance vont se situer les planètes, si planètes il y a. Ce problème est lié à la recherche d'un système solaire générique, i.e. de la configuration plus ou moins universelle d'un système de type solaire.

# PARTIE I
# SUR LES LOIS DE LA NATURE

## 1. Sur les lois de la nature

Il me semble que nous avons tous plus ou moins une notion de loi de la nature en tête. Si cette notion de loi de la nature s'impose c'est précisément parce qu'elle est équitablement partagée par tous. La notion de loi a aussi tendance à venir dès que nous parlons de science. Un domaine non scientifique serait sans doute une activité ou aucune loi d'aucune sorte n'arrive à émerger. Émile Borel a ainsi évoqué ce phénomène:

"Qu'il s'agisse de la culture du sol auquel on confie des semences en vue d'une récolte lointaine ou des problèmes sans nombre qu'il a fallu résoudre pour l'élevage des animaux, la chasse, la pêche, la navigation, la conservation ou la cuisson des aliments, l'homme n'a pu vivre et progresser que grâce à la connaissance des lois naturelles toujours plus nombreuses et à une confiance grandissante en la valeur de ces lois. Quelque opinion métaphysique que l'on professe sur la contingence des lois de la nature, sur ce qu'elles étaient bien avant qu'il y eût des hommes, sur ce qu'elles seront longtemps après que l'humanité aura disparu (à supposer que ces questions aient un sens), il parait incontestable qu'au point de vue pratique, pragmatiste comme on dit parfois, la croyance en ces lois est pour nous une necessité: nous ne pourrions pas nous endormir si nous n'étions pas assurés que le soleil se lèvera demain. De même, on concevrait difficilement l'existence d'un homme, qui lachant une pierre au-dessus de son pied, ne s'attendrait pas à la voir tomber et à avoir le pied écrasé."

Nous allons voir que sous ces mots et sous cette notion se cache beaucoup de difficultés qui tiennent aussi bien à la définition même de loi, que, une loi étant donnée, à son application.

**1.1. Une définition.** — Il me semble assez difficile de donner une définition précise de la notion de loi de la nature, sans doute parce que la précision que j'ai en tête relève plus des mathématiques que de la physique. Une présentation qui correspond bien à ce que j'entend par loi de la nature est donnée par A. Einstein [**6**] dans un article intitulé "Physique et réalité" en 1936:

"Nous appellerons "concepts primaires" des concepts qui sont directement et intuitivement reliés à des complexes typiques d'expériences sensibles. Toutes les autres notions possèdent, du point de vue physique, une signification seulement dans la mesure où elles sont reliées par des propositions aux notions primaires. Ces propositions sont, en partie, des définitions de concepts (et des énoncés qui en dérivent logiquement) et, en partie, des propositions qui ne peuvent être déduites des définitions, mais qui expriment au moins indirectement des relations entre les "concepts primaires" et, de cette manière, entre les expériences sensibles. Des propositions de ce dernier genre sont "des affirmations concernant la réalité" ou des "lois de la nature", c'est à dire des énoncés qui doivent montrer leur utilité quand ils sont appliqués aux expériences sensibles traduites par les concepts primaires."

Cette définition laisse de la place à de l'indétermination sur ce qui doit être considéré comme une loi de la nature ou non. Albert Einstein précise (*ibid*):

"Quant à savoir quels énoncés devront être considérés comme des définitions et quels autres comme des lois naturelles, cela dépendra dans une large mesure de la représentation choisie. En réalité, il ne devient absolument nécessaire d'établir cette différence que lorsqu'on détermine jusqu'à quel point tout le système de concepts considéré n'est pas vide au point de vue physique."

Pour pouvoir discuter les lois de la nature, nous allons maintenant préciser un peu les caractéristiques attendues de ces lois:

– universelle;
– atemporelle.

Ces deux contraintes n'ont rien d'évidentes comme nous allons le voir. Elles sont la plupart du temps vérifiées par les lois usuelles, comme la loi de la gravitation de Newton par exemple, ou les lois de l'électromagnétisme. C'est justement l'aspect universelle qui nous permet d'explorer et de comprendre le monde bien au dela de notre domaine d'action (en étant large, le système solaire) et de discuter l'évolution de l'univers dans le passé ou le futur.

**1.2. Sur l'universalité des lois de la nature.** — Le problème que nous abordons maintenant est le suivant:

- *Comment connaître une loi à portée universelle à partir de notre expérience* ?

C'est une question fondamentale qui se pose en fait pour toutes les lois connues encore aujourd'hui. Je vais prendre l'exemple de la loi de gravitation de Newton.

Le mot universelle recouvre en fait deux points distincts: l'universalité en espace et en temps.

- Pour ce qui est de l'espace: la loi de Newton a été découverte sur terre. Nous l'appliquons aux planètes du système solaire avec succé(1). La validité relative de cette loi est donc dans un premier temps confinée au système solaire. Comment savoir si cette loi s'applique dans d'autres domaines de l'univers ? Dans le cas de la gravitation, on observe des étoiles doubles dont les positions sont correctement prédites par la gravitation de Newton appliquée à deux étoiles. Si elle s'applique à des objets céleste lointains comme les étoiles on peut raisonablement supposer sa portée universelle, mais ce n'est pas une déduction logique.

Bien que la plupart des scientifiques s'accordent sur le statut universelle de la loi de Newton, il existe des exceptions notables, notamment Mordehal Milgrom [**22**] qui propose une modification des lois de Newton, connue sous le nom de théorie MOND, dans le cas ou les accélérations sont suffisamment faible (plus petite qu'une certaine constante fixée par la théorie). La théorie de Newton ne permet pas d'expliquer certains phénomènes dynamiques dans les galaxies. Pour obtenir une adéquation entre la théorie de Newton et les données expérimentales on a recour à la *masse cachée*, de nature indéterminée. Ce problème de masse manquante soulève de nombreuses questions notamment sur la nécessité d'abondonner ou non la théorie de Newton. C'est tout simplement ce qu'a fait Milgrom en modifiant la loi d'inertie. Ce n'est pas la première fois que la théorie de Newton soulève ce type de problèmatique. On a ainsi évoqué l'existence d'une cinquième force fondamentale de la nature, i.e. une dépendance de la "constante" de gravitation en fonction de la matière ou une variation de la "constante" de gravitation en fonction de la distance.

- Pour le temps: C'est une question délicate. Elle nécessite une hypothèse globale sur l'univers et son évolution. Si on considère un univers statique, alors nul doute que l'on peut supposé la loi de gravitation comme universelle en temps. C'est plus compliqué dans le cas dynamique. P.A.M. Dirac [**3**] avait fait l'hypothèse que les constantes fondamentales varient au cours du temps(2). La forme des lois serait donc invariante en temps, mais

(1) Néanmoins, certains phénomènes ont nécessité une modification de la théorie de Newton, par exemple l'avance de périhélie de Mercure, qui demande la relativité générale d'Einstein.
(2) Voir à ce sujet le commentaire de R. Feynman [**8**],p. 290.

les paramètres, i.e. les constantes, dépendraient du temps. On voit ici que le terme de constante est peut être mal choisi.

**1.3. Effectivité pratique.** — Le but d'une loi de la nature est de fournir une régle permettant de faire une prédiction. Or, même si la prédiction est théoriquement certaine, son application effective n'en est pas pour autant sûr.

Je reprend l'exemple de la théorie de la gravitation de Newton (englobant la loi de la gravitation universelle et les lois du mouvement). Cette théorie permet a priori de prédire la position au cours du temps d'un corps soumis à l'attraction d'un autre. Cette prédiction se fait via une équation différentielle ordinaire, que l'on peut résoudre explicitement[(3)]. Le résultat est une formule close donnant, une position initiale étant fixée, la position de la planète au temps $t$. Ce type de résultat marque un tournant dans notre vision de la nature. Elle est résumée par le *déterminisme de Laplace*:

"Nous devons donc envisager l'état présent de l'Univers comme l'effet de son état antérieur, et comme cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaitrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respcetive des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ses données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome: rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé serait présent à ses yeux..."

P-S. Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, réed. Bourgeois, 1986.

Je renvoie au texte de A.D. Dalmedico "Le déterminisme de Pierre-Simon Laplace et le déterminisme aujourd'hui", dans le livre *Chaos et déterminisme*, p. 371-406, pour plus de détails.

Tout semble se passer correctement, mais la formule cache une difficulté. Il est en général impossible de connaître la position de la planète explicitement. On peut la connaître à une *précision* donnée, mais jamais avec certitude. On voit donc ici que la donnée de la loi ne suffit pas à elle seule à fournir une prédiction exacte sur la position des planètes. Elle offre néanmoins des renseignements importants sur le comportement dynamique du système solaire.

(3) Voir en appendice les calculs.

Remarquons que nous avons juste mis en évidence le fait qu'une loi ne permet pas pratiquement de prédire la position exacte de la planète au temps $t$ du fait de la non connaissance de la position initiale exacte de la planète à l'instante $t_0$. Mais nous ne savons même pas si cette indétermination sur la position initiale permet de faire une quelconque prédiction, autrement dit :

*Cette imprécision sur la position de la planète a-t-elle une importance* ?

La réponse que l'on peut formuler va nous conduire à développer une notion, celle de *stabilité* des solutions d'une équation différentielle et à discuter un domaine tout récent des mathématiques, celui de l'étude du *chaos déterministe.*

*1.3.1. Sur la stabilité.* — Si la loi permet de faire une prédiction à une erreur raisonable près à partir d'une condition initiale connue à une précision donnée, c'est que l'écart entre la solution vraie, i.e. associée à la condition initiale exacte et celle pratique, à partir de la condition initiale calculée, est faible, ou au moins reste dans un voisinage de la solution initiale sur un temps infini. Cette idée de stabilité, correctement formalisée, conduit à la notion de *stabilité au sens de A.M. Lyapounov.*

Notons que nous pouvons ensuite soit affaiblir cette notion de stabilité ou au contraire la rigidifier un peu comme pour la notion de loi de la nature.

- *Stabilité asymptotique*: On demande cette fois que l'écart avec la solution vraie décroit avec le temps. Autrement dit, si on part un peu à coté de la solution vraie, il suffit d'attendre suffisamment longtemps pour obtenir une précision aussi grande que l'on veut.

- *Stabilité en temps fini*: C'est une idée en fait naturelle. Si l'on pense au système solaire, il est assez ridicule de se poser la question théorique de la stabilité ou non en temps infini de la position de la terre. On sait que le soleil va passer par un stade d'évolution appelé géante rouge qui est caractérisé par une augmentation de son enveloppe. Cette augmentation sera telle que la trajectoire de la terre sera alors comprise dans le soleil. On peut donc se dire que pour ce qui concerne le système solaire, indépendament de l'intérêt théorique du problème de la stabilité asymptotique du problème des $n$ corps, une stabilité sur un temps fini mais suffisamment long soit suffisant.

Dans le cas des systèmes hamiltoniens[4] qui sont proches d'un système intégrable, dont le problème des $n$-corps avec un corps central beaucoup plus gros que les satellites fait

[4] Voir en appendice pour une définition.

partie, il existe le *théorème de Nekhoroshev* qui implique une stabilité sur un temps fini, mais *exponentiellement long* en le paramètre qui régit la proximité au système intégrable. Il est très difficile d'appliquer ce théorème dans des situations concrètes, par exemple avec les masses connues des planètes. Dans certains cas, on peut néanmoins démontrer des résultats intéressant, comme la stabilité des points de Lagrange par exemple.

Mais il y a en fait des situations où cette impossibilité à déterminer une condition initiale exactement a des conséquences beaucoup plus déroutantes.

*1.3.2. Chaos déterministe.* — Comme nous le venons de la voir, la pensée scientifique du 19$^e$ siècle fait de l'univers un monde de raison régi par des lois immuables. Tout est déterministe et “réglé comme une horloge”. La situation change au début du 20$^e$ siècle avec les travaux de Henri Poincaré sur le problème des 3 corps. à cette occasion, il s'appercoit que certaines solutions du problème des 3 corps, bien qu'entièrement déterminée par les équations du mouvement qui proviennent de la théorie de Newton, sont d'une si grande complexité qu'il n'est plus possible a priori de savoir ce que fait le système sur un temps assez long.

Cette indétermination peut en fait se caractériser par une série de conditions sur les différents types de trajectoires du système et leur comportement dans le temps. La condition la plus importante est celle de *sensibilité aux conditions initiales*: deux trajectoires de conditions initiales aussi proche que l'on veut ont un comportement radicalement différent sur un temps fini. Autrement dit, la sensibilité aux conditions initiales est une mesure de la façon dont divergent deux trajectoires de conditions initiales aussi proche que l'on veut. Si $\epsilon$ désigne cette proximité des conditions initiales et $d_t$ la distance au temps $t$ la solution en $x_0$ et celle en $x_0 + \epsilon$, on a typiquement des comportements du type

$$d_t = \epsilon \, e^{\frac{t}{\delta}}, \tag{1}$$

où $\delta$ est un temps caractéristique de cette vitesse de divergence appelé *temps de Lyapounov* ou *horizon de prédictibilité* du système.

Henri Poincaré résume ainsi la situation dans son livre *Science et Méthode* en 1908:
“Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard.”

On voit ici qu'une seconde notion vient se greffer à la notion de non prédictibilité, celle de *hasard*. Nous allons discuter plus précisément cette connexion entre chaos et hasard dans la suite. Là encore, des conséquences importantes sur notre compréhension de la nature et de sa modélisation vont se mettre à jour.

*1.3.3. Chaos et hasard.* — La modélisation de l'évolution temporelle d'une donnée peut se faire de plusieurs façons. Jusqu'ici, nous avons surtout parlé des équations fondamentales de la dynamique de Newton, donc d'équations différentielles. Cette modélisation est donc continue en temps. On peut aussi faire une modélisation discrète. Cela revient à regarder un phénomène à un intervalle de temps régulier $T$. On obtient ainsi une suite de données $x_i$ pour tous les temps $t_i = iT$, $i \in \mathbb{N}$, le temps $t_0 = 0$ correspondant à la donnée de la condition initiale. étudier la dynamique du phénomène revient donc à comprendre les divers types de comportement possibles des suites $x_i$ pour tous les $x_0$ possibles.

Du point de vue mathématique, on est donc conduit à étudier ce que l'on appelle des suites récurrentes. On peut supposer que l'existence d'une loi gouvernant la dynamique du système est équivalente à la donnée d'une fonction $f$ telle que la manière de passer de $x_n$ à $x_{n+1}$ soit toujours la même. Autrement dit, regarder l'évolution d'un système discret soumis à une loi de la nature revient (en gros) à regarder une suite récurrente de la forme

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

L'étude de la dynamique de $f$ est dans certains cas très simple. Par exemple, si $f(x) = x$, alors pour toute condition initiale $x_0$, on a $x_n = x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $x_i$ représente la position d'un objet au temps $i$ soumis à la loi $f(x) = x$, alors un objet placé à un endroit ne bouge pas. Ce comportement n'est évidemment pas représentatif et on peut obtenir des comportements très compliqués même pour des lois $f$ très simples.

L'exemple le plus simple au niveau graphique est celui de la fonction dit *chapeau de clown*, définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } x \leq 1/2, \\ 2(1-x) \text{ si } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Que donne la dynamique de cette fonction ?

Prenons quelques valeurs:

- $x_0 = 1/2$, $x_1 = 1$ ,$x_2 = 0$, $x_3 = 0$ ,..., on reste sur 0 à partir de la 3$^e$ étape.
- $x_0 = 1/4$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ ,..., et encore une fois on reste sur 0.

Dans ce cas, la dynamique converge vers un état d'équilibre (ici 0). Il y a évidemment d'autres points d'équilibres du système (par exemple $x = 2/3$).

On peut aussi trouver des comportements *périodiques*: en partant de $x_0$ on retombe sur $x_0$ au bout de $k$ étapes. Le $k$ s'appelle la *période*. Par exemple, si $x_0 = 2/7$, alors $x_1 = 4/7$, $x_2 = 6/7$ et $x_3 = 2/7 = x_0$ et on recommence. De manière générale, toute condition initiale rationnelle (i.e. de la forme $p/q$, avec $p$ et $q$ des entiers) conduit à un comportement périodique.

On a donc trouvé des conditions initiales qui convergent vers un état d'équilibre, ou un comportement périodique. Existe-t-il d'autres types de comportements ?

Pour le voir, il faut prendre une condition initiale qui ne soit pas rationnelle (par exemple $\sqrt{2}/2$). Dans ce cas, les valeurs de la suite vont passer par une infinité de valeurs sans jamais se stabiliser ou devenir périodique. Ce type de suite est dite *turbulente* ou *chaotique*. Ce comportement turbulent s'observe pour toute condition initiale irrationnelle.

Supposons donc maintenant que la loi d'un système soit donnée par la fonction chapeau de clown. Pouvons-nous prédire le comportement du système ?

La réponse est non. Pourquoi ? Aussi proche que l'on veut d'une condition rationnelle se trouve une condition initiale irrationnelle et vice versa (ce résultat traduit la *densité* de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels dans $\mathbb{R}$). Si la valeur exacte de la condition initiale est rationnelle on doit obtenir un comportement périodique. Or, par une perturbation aussi petite que l'on veut de cette condition, on obtient un comportement turbulent qui passe par une infinité de valeurs......

Ce que nous venons donc de voir, c'est que bien que le système soit contraint par une loi, il est *pratiquement* imprédictible. Par ailleurs, cette imprédictibilité ne veut pas dire qu'il n'y a pas d'ordre et de structure. Au contraire, on a des comportements périodiques partout, donc facile à décrire avec un nombre fini d'informations.

Le comportement de ce système est dit *chaotique*. Il se caractérise par les trois conditions suivantes:

- Les comportements périodiques sont denses (il y en a partout),
- Il y a sensibilité aux conditions initiales,
- Il existe au moins un comportement turbulent

Nous allons maintenant introduire un modèle abstrait mais très simple de cette relation un peu bizarre entre hasard et imprédictabilité: le *décalage*. On en profitera alors pour affiner notre définition des systèmes chaotiques.

*1.3.4. Un modèle de système chaotique: le décalage.* — Notons $\Sigma$ l'ensemble des suites écrites avec un 0 ou un 1. Un élément $s$ de $\Sigma$ est donc la donnée d'une suite $s = (s_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, où $s_i \in \{0,1\}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On définit sur $\Sigma$ une application $\tau$, appelée *décalage* (ou shift) qui consiste à décaler d'un cran vers la gauche la suite. Précisément, on a

$$\tau : \begin{array}{ccc} \Sigma & \longrightarrow & \Sigma \\ s = (s_i) & \mapsto & \tau(s) = (\tau(s)_i = s_{i+1}). \end{array}$$

Par exemple, la suite $\dots 010110010011 \dots$ est envoyée par $\Sigma$ sur $\dots 10110010011 \dots$. Si pour une suite donnée $s = (s_i)$ on pense le terme $s_i$ comme l'évolution au temps $i$ de $s$, alors l'effet de $\tau$ consiste à remonter le temps, en remplaçant $s_i$ par $s_{i+1}$.

L'application $\tau$ est très simple. Elle a néanmoins un comportement très compliqué et qui ressemble beaucoup à celui de la fonction chapeau de clown.

On remarque tout d'abord qu'il est facile de fabriquer des comportements périodiques. Il suffit d'écrire un mot 011010011 et de la répéter une infinité de fois.

Si une suite est quelconque, on peut en tronquant une partie arbitrairement grande et en la répétant, l'approximer par un comportement périodique de période arbitrairement longue.

Pour parler d'approximation, on doit pouvoir parler de la proximité de deux suites. C'est possible en introduisant une distance sur $\Sigma$. Soit $s$ et $s'$ deux suites de $\Sigma$, on note $d(s,s')$ la quantité

$$d(s,s') = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{\mid s_i - s'_i \mid}{2^{|i|}}.$$

La pondération de l'écart $\mid s_i - s'_i \mid$ entre les deux suites permet de donner plus d'importance aux événements proches du présent. Deux suites seront proches si et seulement si elles coincident sur une large échelle de temps dans le passé et le futur.

*1.3.5. Modélisation de la nature.* — Comme nous l'avons vu, un système déterministe peut avoir un comportement équivalent à un jeu de pile ou face. Nous avons donc maintenant le problème suivant:

Supposons qu'un phénomène de la nature donné ait un comportement aléatoire. Comment le modéliser ?

Nous avons maintenant deux possibilités:

- Décréter que le phénomène est purement aléatoire et n'est donc pas régi par une loi. Je vais revenir sur ce point après.
- Supposer qu'il existe une loi, et donc le système déterministe, mais dont la dynamique est chaotique.

Pour vous montrer comment ces deux possibilités de modélisation ne vont pas de soi, voila une citation d' émile Borel, extraite de son livre *Hasard*, Libraie Félix Alcan, 1928:

"La nécessité "humaine" des lois naturelles est le point de départ de toute spéculation scientifique; ce principe est tellement évident qu'on juge inutile de le répéter dans chaque ouvrage de sciences. J'aurais pu aussi le sous-entendre; si je ne l'ai pas fait, c'est parce que le hasard, qui est l'objet de ce livre, s'oppose précisément à la notion de loi; il n'était donc peut-être pas inutile de rappeler brièvement la place éminente qu'il ne saurait être question de contester à cette notion."

Ce que l'on vient de voir sur les systèmes chaotiques montre que ce point de vue n'est plus tenable. Il existe bel et bien des lois qui conduisent malgrés tout à du hasard. Ceci dit, dans le cas ou nous choisissons la modélisation par une loi, on se demande bien comment nous allons pouvoir la récupérer à partir du comportement chaotique du système. Cette problèmatique importante, nous conduira dans la section suivante à définir de nouvelles formes de lois de la nature.

**1.4. Effectivité théorique.** — L'effectivité théorique consiste à savoir comment nous allons faire pour valider ou non une loi comme loi de la nature. Prenons l'exemple de la gravitation. On teste sa validité en effectuant des mesures précises sur la chute des corps, ou encore la position des planètes et en comparant ces données avec un modèle. Comment s'effectue cette modélisation ? On écrit les lois du mouvements. Dans le cas d'une pierre qui tombe sur la terre, on écrit le mouvement de la pierre soumis à l'attraction de la terre. Tout ceci semble naturel et pourtant il y a la plusieurs difficultés importantes.

La loi de la gravitation de Newton possède une portée infinie. Autrement dit, en un lieu donné, nous subissons l'influence plus ou moins importante de tous les corps de l'univers[(5)]. Notre modélisation ne prend en compte que l'attraction de la terre car on suppose que les effets perturbatifs dus aux autres planètes sont négligeables. Or ce n'est pas toujours

[(5)] Attention, ceci n'est pas un playdoyé pour l'astrologie.....si vous avez une ou deux personnes à coté de vous, leur influence gravitationnelle est bien plus grande que toutes les influences des planètes du système aolaire.....

le cas. Pour le mouvement des planètes ou plus précisément de la modélisation associée, on ne sait toujours pas si la dynamique à long terme est chaotique, même si certaines expériences numériques nous disent que oui. Autrement dit, nous validons une loi de la nature par un modèle ne prenant pas en compte tous les effets prédits par cette même loi.

La modélisation du système solaire par le mouvement de 9 points matériels de masse donné est-elle correcte ? On peut imaginer mieux appréhender les choses en rajoutant les effets dûs à la forme non sphérique des planètes. On obtient encore des équations du mouvement. On peut aussi imaginer rajouter plusieurs autres effets. Néanmoins, il y a toujours des effets que nous ne maitrisons pas et qu'il faut prendre en compte afin d'avoir une réponse plus ou moins définitive à la validation de notre loi comme loi de la nature. Une première idée consiste à faire une théorie des perturbations. Par exemple, supposons que notre loi soit donnée par une fonction $f$ et qu'elle conduise à un certain type de dynamique. On peut essayé de montrer que toute fonction de la forme $f + \epsilon g$, ou $g$ est une fonction quelconque, possède le même comportement pour $\epsilon$ suffisamment petit. Autrement dit, même si je bouge un peu ma loi, le comportement reste lui, à peu près le même. On peut donc valider $f$ comme une loi de la nature car quel que soit les effets que nous aurons oublié, ils ne changeront pas l'accord des données prédites avec l'expérience.

On peut s'arréter ici et penser que via la théorie des perturbations nous avons bel et bien pris en compte tous les effets possibles puisque $g$ est arbitraire. C'est néanmoins une erreur. Il n'y aucune raison que certains effets ne sortent pas du cadre des fonctions par exemple. Une fonction possède certaines propriétés qui contraignent très fortement les comportements.

Une première idée est par exemple d'inclure le hasard dans notre modélisation. Non seulement nous allons perturber la loi $f$ par une petite fonction $\epsilon g$, mais nous allons aussi rajouter du bruit, sous la forme d'une variable aléatoire par exemple. Si avec l'addition de ce bruit, les données restent sensiblement les mêmes que celles qui sont prédites, on peut supposer que notre loi $f$ est bien une loi de la nature. Est-ce bien sûr ?

Pour rajouter une variable aléatoire, nous allons utiliser la théorie des probabilités, i.e. une formalisation mathématique du hasard ou tout du moins, d'un certain type de hasard, justement celui qui se laisse appréhender par cette théorie. Nous devons donc faire attention ici. Nous somme toujours dans le domaine de la modélisation et rien n'empéche de penser que certains effets réels sortent de ce cadre. Que faire alors ?

On peut imaginer à l'infini une hiérarchie d'extension à partir de la loi initiale pour arriver au plus près d'une validation théorique de la loi. Mais les raisonnements précédents vous montrent aussi que cette démarche est sans fin et que l'entreprise sera sans doute de plus en plus difficile. Dans l'exemple ci-dessus, on se demande bien ce qui peut aller plus loin que la théorie des probabilité, plus loin que le hasard que nous savons modéliser......et que recouvre ce domaine inexploré.......

Jusqu'à un certain point donc, nous pouvons justifier la validité d'une loi de la nature. Il n'en reste pas moins que la validation ultime n'est pas décidable. On en vient alors à deux comportements face à cet état de fait:

- Soit on suppose que les lois de la nature existent mais que nous n'avons accé qu'à des formes plus ou moins approximatives.
- Soit supposer que ces lois sont une pure construction et qu'elles sont simplement des aides à la modélisation et la structuration du monde qui nous entoure.

C'est à vous de choisir la solution qui vous convient le mieux pour avancer, car après tout c'est surtout ça qui importe. Pour ma part, je pense qu'il doit exister des lois de la nature et qu'il convient de trouver des méthodes pour les débusquer. Comme souvent cet a priori sur ce que doit être les choses, même si il n'est pas fondé, me permet de mieux travailler et de chercher dans certaines directions plutot que d'autres.

## 2. Vers d'autres types de lois: les lois statistiques et les lois du chaos

# PARTIE II
# AUTOUR DE LA LOI DE TITIUS-BODE

## 1. La loi de Titius-Bode

**1.1. Un peu d'histoire.** — L'organisation du système solaire préoccupe depuis longtemps astronomes et physiciens [**30**]. L'histoire remonte au moins à la grèce antique, avec Plutarque. Dans le cadre d'un système géocentrique, viens ensuite Ptolémé, dont les estimations des rapports des distances planétaires sont interprétés par Cassius Dio comme des intervalles réguliers de musique. Il était alors pratiquement impossible de ne pas penser à l'existence d'une harmonie celeste.

En 1596, dans son livre *Mysterium Cosmographicum*, Kepler explique pourquoi le système solaire contient exactement six(6) planètes et justifie les valeurs des distances au soleil en établissant un lien entre les orbites planétaires et les cinq polyhèdres réguliers (les solides dits platoniciens) en logeant un polyhèdre approprié entre chacune des sphères définies par les orbites des planètes. Ce qui est étonnant, c'est que Kepler, qui formule les lois qui porte son nom en (1609-1619), dont une conséquence est le fait que les orbites des planètes sont des ellipses, republie une version du mysterium avec sa vision des polyhèdres réguliers et des sphères, manifestement en contradiction avec ses résultats observationnelles. La beauté géométrique de la construction a du l'emporté sur la vérité(7).

En 1766, Titius, mathématicien, physicien et astronôme allemand, découvre une formule qui donne une approximation des distances relatives des planètes au soleil (seulement 6 planètes étaient connues à cette époque). Cette formule, connue sous le nom de *loi de Titius-Bode* est définie par

$$a_n = 0.4 + 0.3.2^{n-1}, \tag{2}$$

pour $n \geq 1$, où $a_n$ est la position de la $n$-i-ème planète en unité astronomique(8).

Cette formule gagna en crédibilité lorsque Uranus fut découverte en 1781 par Herschel à une valeur proche de la celle prédite par la loi, et lorsque Piazzi observa en 1801 un des

(6) Le système solaire compte 9 planètes, mais seulement six étaient connues à cette époque.
(7) C'est manifestement chose commune. Il me semble que beaucoup de physicien céde à la beauté mathématiques, surtout depuis les travaux d'Einstein, et ceci, quitte à oublier des données génantes ou a obtenir une théorie non falsifiable comme la théorie des cordes.
(8) 1 unité astronomique=distance de la terre au soleil, soit 150 millions de kilométres environ.

plus gros astéroide de ce qui s'appelle maintenant la *ceinture d'astéroides*, et qui occupe la place $n = 5$ de la suite de Titius-Bode, jusqu'ici inocupée.

Néanmoins, la loi de Titius-Bode présente un écart important pour les distances des deux dernières planètes du système solaire, Neptune et Pluton. Notons que la loi de Titius-Bode entra pourtant dans la découverte de Neptune en 1846 par Galle à l'Observatoire de Berlin. En effet, la position de Neptune fut prédite par le calcul en 1845 par Le Verrier et Adams. Pour les besoins de leurs calculs, ils devaient postuler une distance moyenne au soleil, ce qui fut fait avec la loi de Titius-Bode, qui pourtant ne marche pas dans ce cas ! On trouvera plus de détails historiques sur la loi de Titius-Bode dans le livre de Nieto [**27**].

Le point essentiel est que nous ne savons toujours pas si la loi de Titius-Bode (ou plus généralement, pour ne pas se référer à une formule donnée, une loi de répartition des planètes autour d'une étoile) est une loi de la nature. Le problème est évidemment difficile.

C'est principalement l'aspect universel de la loi qui est en jeu ici. La découverte toute récente de systèmes d'exoplanètes par Wolsczan et Frail [**35**] en 1991 permet néanmoins de tester l'éventuelle universalité de la loi de Titius-Bode.

Notons au passage, que son universalité éventuelle a en fait été testée dans le système solaire lui même: la loi de Titius-Bode a été appliquée à la répartition des anneaux et des satellites des grandes planètes. On consultera [**7**] pour un exposé de ces travaux. Dans ce cas, la loi de Titius-Bode devait aider à découvrir de nouveaux satellites des planètes.

**1.2. Une loi de répartition des planètes autour d'une étoile ?—** Les problèmes qui se posent ici sont de deux types:

- *Supposons que la loi de Titius-Bode soit valable, peut-on la justifier théoriquement à partir de principes premiers de la physique* ?

Il existe plusieurs approches à ce jour:

- On se donne une étoile, des milliers de petits corps formant un nuage de poussières autour de l'étoile et censé représenter la configuration initiale du système solaire, et on étudie numériquement l'évolution dynamique de ce système pour voir si oui ou non des planètes se forment, en combien de temps, de quelle taille et à quelle distance. Je renvoie notamment aux travaux de Hayes et Tremaine [**14**] et ceux de Jacques Laskar [**18**].

- On reprend la configuration d'un nuage de poussière autour d'une étoile et on écrit les équations du mouvement des petits corps soumis à un certain nombre d'intéraction. On se limite en général à la gravitation. Tout le problème est alors de démontrer que certaines zônes sont privilégiées pour la formation des planètes. Cette approche a donné lieu à une abondante littérature. Les travaux les plus marquants à mon avis sont ceux de Molchanov ([**24**],[**25**], [**26**]) vivement critiqueés par Michel Hénon [**12**] et ceux de Laurent Nottale [**28**].

Dans ce dernier cas, la signification profonde de la loi de Titius-Bode n'est pas celle d'une loi associée rigidement à une situation donnée. C'est une loi d'origine statistique. La loi de Titius-Bode ne prédit pas précisément la distance moyenne au soleil des planètes, mais donne la position la plus probable. On peut se poser la question de savoir dans quelle mesure ce type de loi est ou non élligible au statut de loi de la nature. L'aspect probabiliste est en effet absent, tout du moins en surface, des grandes lois de la nature (gravitation,électromagnétisme...). C'est donc un nouveau type de lois que nous abordons ici, qualifiées par I. Prigogine [**31**] de *lois du chaos* car associées à tous les phénomènes ou le chaos entre en jeux. Nous aborderons en détail ce point dans la dernière partie du cours.

- *Peut-on construire "naturellement" la loi de Titius-Bode à partir de la suite des distances moyennes au soleil des planètes* ?

Evidemment, toute la difficulté du problème tient dans le naturel dont on parle ici.

Plus généralement, nous aborderons le problème suivant, récurrent dans toutes les sciences expériementales:

- *Comment savoir, à partir d'une suite de données expérimentales, si cette suite de nombres est contrainte par une loi ou simplement le fait du hasard* ?

Cette question a donné lieu à d'interessant travaux de statistique. Les travaux de Good [**11**] et plus particulièrement ceux de B. Efron [**5**] apportent un éclairage important sur ce problème.

Le bilan de ces travaux, mis à part les méthodes mathématiques mises en jeu et les problèmes soulevés, est que la justification statistique d'une loi à partir simplement d'une suite de nombre n'est pas décidable dans l'absolue. On doit à un moment ou un autre contraindre les données ou le modèle sous jacent aux données.

Dans le cas de la loi de Titius-Bode par exemple, on compare souvent l'entreprise de Titius à de la *numérologie*. Le fait que l'on ne peut pas trancher à partir des données si une loi les gouverne ou non donne du crédit à ce point de vue. Néanmoins, je crois que c'est en fait oublié bien vite ce qui pousse les scientifiques à chercher des lois. On ne cherche pas une loi si on est pas convaincu à l'avance, par des considérations qui peuvent aller de la théologie à la physique, voir la métaphysique, que cette loi existe. Pour Kepler par exemple, c'est la ferme croyance je pense, en un ordre divin préétabli de l'univers. Je pense que tout le monde a ressenti ce phénomène un jour, en mathématiques notamment, qu'un résultat est vrai, et pour lequel aucune démonstration n'existe. Cela donne lieu à des conjectures, parfois fausses, souvent vraies, qui montre que ces intuitions, que l'on a souvent du mal à justifier complétement, découle d'un long processus de réflexion souvent inconscient (on "sent" que c'est vrai...). Pour les lois de la physique, ce phénomène doit exister aussi, via un processus tout aussi compliqué.

## Références


[1] Barberousse A., Kistler M., Ludwig P., *La philosophie des sciences au XX$^{e}$ siècle*, Champs Université, Flammarion, 2000.

[2] Backus G.E., Critique "The resonant structure of the solar system" by A.M. Molchanov, Icarus 11, 88-92, 1969.

[3] Dirac P.A.M., ?

[4] Dubrulle B., Graner F., Titius-Bode law in the solar system II. Build your own law from disk models, Astron. Astrophys. 282, 269-276, 1994.

[5] Efron B., Does an observed sequence of numbers follow a simple rule ? (another look at Bode's law), J. Am. Statist. Assoc. 66 (335), 552-559, 1971.

[6] Einstein A., *Conceptions scientifiques*, Collection Champs, Flammarion, 1990.

[7] Feitzinger J.V., Neuhaüser R., À la recherche de satellites inconnus, La recherche no. 212, Vol. 20, 945-947, 1989.

[8] Feynman R., *La nature de la physique*, Coll. Points sciences, éditions du seuil, 1980.

[9] Feitzinger J.V., Neuhaüser R.,Astron. Astrophys. 204, L1, 1988.

[10] Graner F., Dubrulle B., Titius-Bode law in the solar system I. Scale invariance explains everything, Astron. Astrophys. 282, 262-268, 1994.

[11] Good I.J., A subjective evaluation of Bode's law and an "objective" test for approximate numerical rationality, J. Am. Statis. Assoc. 64, 23-66, 1969.

[12] Henon M., A comment on "The resonant structure of the solar system" by A.M. Molchanov, Icarus 11, 93-94, 1969.

[13] Hills J.G., Dynamics relaxation of planetary systems and Bode's law, Nature 225, 840-842, 1970.

[14] Hayes W., Tremaine S., Fitting selected random planetary systems to Titius-Bode laws, Icarus 135, 549-557 (1998).

[15] Herman M., L'hypothèse ergodique et la stabilité en mesure, Journée annuelle de la S.M.F., 1996.

[16] Hermann R., Schumacher G., Guyard R., Scale relativity and quantization of the solar system, orbit quantization of the planet's satellites, Astron. Astrophys. 335, 281-286 (1998).

[17] Laskar J., Large-scale chaos in the solar system, Astron. Astrophys. 287, L9-L12 (1994).

[18] Laskar J., On the spacing of planetary systems, Phys. Rev. Lett. 84? no. 15, 3240-3243, 2000.

[19] Lecar M., Bode's law, Nature 242, 318-319, 1973.

[20] Llibre J., Pinol C., A gravitational approach to the Titius-Bode law, Astron. J. 93(5), 1272-1279, 1987.

[21] Lynch P., On the significance of the Titius-Bode law for the distribution of the planets, Mon. Not. R. Astron. Soc. 341, 1174-1178 (2003).

[22] Milgrom M., La modification des lois de Newton, La recherche No. 196, Vol. 19, 182-190, 1988.

[23] Moser J., Is the solar system stable ?, Math. Int.

[24] Molchanov A.M., The resonant structure of the solar system, the law of planetary distances, Icarus 8, 203-215, 1968.

[25] Molchanov A.M., The reality of resonances in the solar system, Icarus 11, 104-111, 1969

[26] Molchanov A.M., Resonances in complex systems : a reply to critiques, Icarus 11, 95-103, 1969.

[27] Nieto M.M., *The Titius-Bode law of planetray distances : its history and theory*, Pergamon, Oxford, New-York, 1972.

[28] Nottale L., The quantization of the solar system, Astron. Astrophys. 315, L9, 1996.

[29] Nottale L., *La relativité dans tous ses états*, Hachette littérature, 2000.

[30] Peterson I., *Le chaos dans le système solaire*, Pour la science, Belin, 1995.

[31] Prigogine I., *Les lois du chaos*, Coll. Champs Flammarion, , 1994.

[32] Safronov V.S., *Evolution of the proptoplanetary cloud and formation of the earth and the planets*, Moscou, 1969.

[33] Sinai Y.G., *Introduction to ergodic theory*, Mathematical Notes, Princeton University Press, 1976.

[34] Sinai Y.G., L'aléatoire du non-aléatoire, dans *Chaos et déterminisme*, Coll. Point Sciences, Ed. du Seuil, 1992, p. 68-90.

[35] Wolszczan A., Frail D., Nature, 255, 145, 1992.

---

Jacky Cresson