C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 261–264, 2000
Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

# Divergence d'échelle et différentiabilité

**Fayçal BEN ADDA [a], Jacky CRESSON [b]**

[a] Laboratoire d'analyse numérique, tour 55-65, 5e étage, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France
Courriel : benadda@ann.jussieu.fr

[b] Équipe de mathématiques de Besançon, Université de Franche-Comté, CNRS-UMR 6623, 16, route de Gray, 25030 Besançon cedex, France
Courriel : cresson@math.univ-fcomte.fr

(Reçu le 25 octobre 1999, accepté le 23 novembre 1999)

**Résumé.** On établit le lien entre divergence d'échelle de la longueur du graphe d'une fonction et sa régularité. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

***Scale divergence and differentiability***

**Abstract.** *Given a continuous function, we establish a link between scale divergence of its curve-length and its regularity.* © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## 1. Introduction

Soit $\Gamma$ le graphe d'une fonction continue $f$ sur un intervalle $[a,b]$. Si la longueur de $\Gamma$, notée $L(\Gamma)$, est finie, on sait, par le théorème de Lebesgue (*voir* [6]), qu'elle est différentiable presque partout. Dans [4], Appendix A, Nottale pose, dans le cadre de la théorie de la relativité d'échelle, le problème suivant : on suppose que la longueur de $\Gamma$ est infinie. Peut-on savoir si la fonction $f$ est non différentiable presque partout ? La réponse dépend de la divergence de la longueur de $\Gamma$ en fonction de l'échelle $\varepsilon$. Si la divergence est polynomiale on démontre que la fonction $f$ est non différentiable presque partout sur un intervalle non réduit à un point. Dans le cas d'une divergence plus faible (logarithmique), on démontre que la courbe peut être rectifiable ou fractale. On établit aussi un lien formel entre la dimension fractale de la courbe, sa divergence d'échelle et son irrégularité locale mesurée par l'ordre de différentiabilité fractionnaire locale.

## 2. Dérivée fractionnaire locale

On complète les travaux de [2] sur la dérivation *fractionnaire locale*.

DÉFINITION 1. – Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$. Pour tout $x\in[a,b]$, on définit l'intégrale de Riemann–Liouville à gauche et à droite du point $x$ par :

$$I^{\alpha}_{a,-}(f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I^{\alpha}_{b,+}(f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1}f(t)\,\mathrm{d}t,$$

**Note présentée par Philippe G. CIARLET.**

S0764-4442(00)00146-4/FLA

respectivement. Les dérivées de Riemann–Liouville à gauche et à droite de $x$ sont données par $\mathrm{D}^{\alpha}_{a,-}(f)(x) = \dfrac{\mathrm{d}I^{1-\alpha}_{a,-}(f)(x)}{\mathrm{d}x}$ et $\mathrm{D}^{\alpha}_{b,+}(f)(x) = \dfrac{\mathrm{d}I^{1-\alpha}_{b,+}(f)(x)}{\mathrm{d}x}$. On renvoie à [3,5] pour plus de détails.

DÉFINITION 2. – Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$, on appelle dérivée fractionnaire locale de $f$ à droite (resp. à gauche) du point $y \in [a,b]$ la quantité $\mathrm{d}^{\alpha}_{\sigma} f(y) = \lim_{x \to y^{\sigma}} \mathrm{D}^{\alpha}_{y,-\sigma}\big[\sigma(f(x) - f(y))\big]$, pour $\sigma = \pm$ respectivement.

On a les propriétés suivantes :

(i) (recollement) si $f$ est différentiable au point $x$, on a $\lim_{\alpha \to 1} \mathrm{d}^{\alpha}_{\sigma} f(x) = f'(x)$, $\sigma = \pm$ ;

(ii) on a $\mathrm{d}^{\alpha}_{\sigma}(C) = 0$ pour tout $C \in \mathbb{R}$ et $\sigma = \pm$.

THÉORÈME 1. – *La dérivée fractionnaire locale de $f$ (à droite ou à gauche), $\mathrm{d}^{\alpha}_{\sigma} f(x)$ est égale à* $\mathrm{d}^{\alpha}_{\sigma} f(x) = \Gamma(1+\alpha) \lim_{y \to x^{\sigma}} \dfrac{\sigma(f(x) - f(y))}{[\sigma(x-y)]^{\alpha}}$.

On note $F_{\sigma}(y, \sigma(x-y); \alpha) = \mathrm{D}^{\alpha}_{y,-\sigma}\big[\sigma\big(f(x) - f(y)\big)\big](x)$. Le théorème 1 découle du

THÉORÈME 2. – *Soit $f$ une fonction continue, telle que $\mathrm{d}^{\alpha}_{\sigma} f(y)$ existe pour $\alpha > 0$, $\sigma = \pm$, alors* $f(x) = f(y) + \sigma \dfrac{\mathrm{d}^{\alpha}_{\sigma} f(y)}{\Gamma(1+\alpha)} [\sigma(x-y)]^{\alpha} + R_{\sigma}(x,y)$, *avec*

$$R_{\sigma}(x,y) = \sigma \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{x-y} \frac{\mathrm{d}F_{\sigma}(y, \sigma t; \alpha)}{\mathrm{d}t} \big(\sigma(x-y-t)\big)^{\alpha} \, \mathrm{d}t \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to y^{\sigma}} \frac{R_{\sigma}(x,y)}{(\sigma(x-y))^{\alpha}} = 0.$$

*Démonstration.* – On effectue la démonstration dans le cas $\sigma = +$. La démarche est analogue pour $\sigma = -$. Puisqu'aucune confusion n'est possible, nous omettons l'indice $+$ dans les formules suivantes. On a $f(x) - f(y) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^{x-y} \dfrac{F(y,t,\alpha)}{(x-y-t)^{1-\alpha}} \, \mathrm{d}t$, d'où

$$f(x) - f(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[ F(y,t,\alpha) \int (x-y-t)^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t \right]_0^{x-y} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-y} \frac{\mathrm{d}F(y,t,\alpha)}{\mathrm{d}t} \frac{(x-y-t)^{\alpha}}{\alpha} \, \mathrm{d}t,$$

alors $f(x) - f(y) = \dfrac{\mathrm{d}^{\alpha} f(y)}{\Gamma(\alpha+1)} (x-y)^{\alpha} + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \displaystyle\int_0^{x-y} \dfrac{\mathrm{d}F(y,t,\alpha)}{\mathrm{d}t} (x-y-t)^{\alpha} \, \mathrm{d}t$. On a donc $f(x) = f(y) + \dfrac{\mathrm{d}^{\alpha} f(y)}{\Gamma(\alpha+1)} (x-y)^{\alpha} + R(x,y)$ avec $\dfrac{R(x,y)}{(x-y)^{\alpha}} = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \displaystyle\int_0^{x-y} \dfrac{\mathrm{d}F(y,t;\alpha)}{\mathrm{d}t} \left( \dfrac{x-y-t}{x-y} \right)^{\alpha} \mathrm{d}t$. Comme $\left| \dfrac{x-y-t}{x-y} \right| < 1$, on a $\left| \dfrac{R(x,y)}{(x-y)^{\alpha}} \right| < \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \big( |F(y, x-y; \alpha)| - |\mathrm{d}^{\alpha} f(y)| \big)$. Comme $\lim_{x \to y} F(y, x-y; \alpha) = \mathrm{d}^{\alpha} f(y)$, on en déduit $\lim_{x \to y} \left| \dfrac{R(x,y)}{(x-y)^{\alpha}} \right| = 0$, ce qui termine la démonstration du théorème. □

## 3. Longueur et échelle

3.1. *Préliminaires.* – On renvoie à [6] pour la définition des courbes polygonales d'approximation construites par le compas. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, on note $P_{\varepsilon}$ la courbe polygonale d'approximation construite par le compas avec un pas de longueur $\varepsilon$, $N(\varepsilon)$ le nombre de sommets de $P_{\varepsilon}$ et $L_{\varepsilon}(\Gamma)$ sa longueur.

LEMME 1. – *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a* $1 + \dfrac{L_{\varepsilon}(\Gamma)}{\varepsilon} \geqslant N(\varepsilon) - 1 \geqslant \dfrac{L_{\varepsilon}(\Gamma)}{\varepsilon}$.

*Démonstration.* – Par définition, on a

$$L_\varepsilon(\Gamma) = L\big([A_1, A_2]\big) + \cdots + L\big([A_{N(\varepsilon)-2}, A_{N(\varepsilon)-1}]\big) + L\big([A_{N(\varepsilon)-1}, A_{N(\varepsilon)}]\big),$$

avec $L\big([A_{N(\varepsilon)-1}, A_{N(\varepsilon)}]\big) \leqslant \varepsilon$ et $L\big([A_i, A_{i+1}]\big) = \varepsilon$ pour $i = 1, \ldots, N(\varepsilon) - 2$. On en déduit le lemme. □

Il est possible de lire la non-différentiabilité d'une fonction sur le type de divergence de $N(\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Ce nombre est toujours croissant. Sa divergence minimale est donnée par les graphes de fonctions différentiables.

LEMME 2. – *Soit $\Gamma$ le graphe d'une fonction différentiable $f$ sur $[a,b]$, et $P_\varepsilon$ sa courbe polygonale d'approximation, alors $N(\varepsilon) = \mathrm{O}(1/\varepsilon)$.*

*Démonstration.* – Soient $A = (x, f(x))$ et $B = (y, f(y))$, avec $y > x$ tels que $(x-y)^2 + (f(x) - f(y))^2 = \varepsilon^2$. Comme $f$ est différentiable, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c) \cdot (x-y)$. On a donc $(x-y)^2\big(1 + (f'(c))^2\big) = \varepsilon^2$, d'où $y - x = C\,\varepsilon$, $C \in \mathbb{R}^+$. On en déduit le lemme. □

3.2. *Résultats.* – Soit $f$ une fonction continue définie sur $[a,b]$, on note $\Gamma_f$ son graphe et $L(f)$ la longueur de $\Gamma_f$.

THÉORÈME 3. – *Soit $f$ une fonction continue, définie sur un intervalle $[a,b]$, si $L_\varepsilon(f) = \mathrm{O}(1/\varepsilon^\delta)$ avec $\delta > 0$, alors il existe un arc de $\Gamma_f$, non réduit à un point, sur lequel $f$ est non rectifiable presque partout.*

*Démonstration.* – Comme $L_\varepsilon(f) = \mathrm{O}(1/\varepsilon^\delta)$, on en déduit, via le lemme 1, $N(\varepsilon) = \mathrm{O}(1/\varepsilon^{\delta+1})$. Si $f$ est différentiable, alors $N(\varepsilon) = \mathrm{O}(1/\varepsilon)$ par le lemme 2. On a donc une contradiction et $f$ est non différentiable sur un intervalle non réduit à un point. □

Soit $f$ une fonction holdérienne d'exposant $H$, $0 < H \leqslant 1$ et inverse-Hölder d'exposant $H$. La dimension fractale du graphe de $f$ est $\Delta(f) = 2 - H$ (*voir* [6], p. 154–155).

THÉORÈME 4. – *Soit $f$ une fonction Hölder et Hölder-inverse d'exposant $0 < H \leqslant 1$, alors pour $\varepsilon > 0$, on a $L_\varepsilon(f) = \mathrm{O}(1/\varepsilon^\delta)$ avec $\delta = \dfrac{1}{H} - 1 = \dfrac{1}{2 - \Delta(f)} - 1$.*

*Démonstration.* – Soient $A = (x, f(x))$ et $B = (y, f(y))$ avec $y > x$ tels que $L([A,B]) = \varepsilon$. Comme $f$ est höldérienne et inverse-höldérienne d'exposant $H$, on a $\varepsilon^2 = c^2(x-y)^{2H} + (x-y)^2$. Alors, $\varepsilon^2 \leqslant (c^2+1)(x-y)^{2H}$ et on a $y - x \geqslant \dfrac{\varepsilon^{1/H}}{c^2+1}$. On en déduit le théorème 4. □

3.3. *Dérivée fractionnaire et divergence d'échelle.* – On note $f \succ g$ si $g = \mathrm{o}(f)$. Soit $f$ une fonction continue, définie sur l'intervalle $[a,b]$, telle que $\mathrm{d}_\sigma^\alpha f$ existe pour $0 < \alpha < 1$ sur l'intervalle $[a,b]$. On a :

THÉORÈME 5. – *Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$, telle que $\mathrm{d}_\sigma^{\alpha_0} f$ est bornée sur $[a,b]$, alors $L_\varepsilon(f) \succ \dfrac{1}{\varepsilon^{1/\alpha_0 - 1}}$.*

*Démonstration.* – Soit $A = (x, f(x))$ et $B = (y, f(y))$ deux points tels que $L([A,B]) = \varepsilon$, alors $(x-y)^2 + (x-y)^{2\alpha}\Big(\dfrac{\mathrm{d}^\alpha f(y)}{\Gamma(\alpha+1)} + \dfrac{R(x,y)}{(x-y)^\alpha}\Big)^2 = \varepsilon^2$, par le théorème 2. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $(x-y)^{2\alpha} \geqslant \dfrac{\varepsilon^2\Gamma^2(\alpha+1)}{(\mathrm{d}^\alpha f(y) + c\Gamma(\alpha+1))^2 + \Gamma^2(\alpha+1)}$. En prenant la racine $1/2\alpha$-ème de cette expression, on obtient $x - y \geqslant \varepsilon^{1/\alpha}/k$. D'où $N(\varepsilon) \leqslant k_1/\varepsilon^{1/\alpha}$, ce qui donne via le lemme 1, $L_\varepsilon(f) \leqslant k_2/\varepsilon^{1/\alpha - 1}$. □

3.4. *Divergence de type logarithmique.* – On a :

THÉORÈME 6. – *Soit* $\Gamma$ *une courbe de paramétrisation* $\gamma(t)$ *définie pour* $t \in [a,b]$, *telle que* $L_\varepsilon(\Gamma) \prec \log \frac{1}{\varepsilon}$, *alors* $\gamma(t)$ *peut être différentiable ou non différentiable presque partout.*

*Démonstration.* – Il suffit de construire un exemple. Soit $S$ un segment orienté et $\phi$ un angle tel que $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/2$, on appelle $T_\phi$ l'opération qui consiste à remplacer $S$ par la courbe polygonale $T_\phi(S)$, de mêmes extémités que $S$, constituée de quatre segments égaux formant avec $S$ les angles $0$, $\phi$, $-\phi$ et $0$ respectivement. La longueur de chacun des segments est donc $\frac{L(S)}{2(1+\cos\phi)}$. On se donne une suite d'angle $(\phi_k)$. On effectue ensuite une construction par récurrence : la courbe $P_k$ est obtenue à partir de $P_{k-1}$ en remplaçant chacun des segments au moyen de l'opération $T_{\phi_k}$. La courbe $P_k$ est faite de $4^k$ segments, tous de longueur $\ell_k = 2^{-k}\prod_{i=1}^k \frac{1}{1+\cos\phi_i}$. Les courbes $P_k$ convergent vers une courbe $\Gamma$ au sens de la distance de Hausdorff. La régularité de la courbe $\Gamma$ dépend de la suite $\phi_k$.

(a) Si $\phi_k = \frac{\pi}{3}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $L(P_k) = \left(\frac{4}{3}\right)^k$. On pose $\varepsilon = \ell_k$, alors $k = \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log 2 + \sqrt{3}}$. On en déduit $\log L_\varepsilon(\Gamma) = \log\left(\frac{4}{3}\right)\frac{\log(1/\varepsilon)}{\log 2+\sqrt{3}}$.

(b) Si $\phi_k = \arccos\Big(2\exp\Big(-\frac{1}{(k+1)^2}\Big)-1\Big)$, alors $\ell_k = \frac{2^{-(k-1)}}{k!^2}$. La formule de Stirling donne pour $k$ assez grand $k! \sim \sqrt{2\pi}\,\sqrt{k}k^{2k}\,\mathrm{e}^{-2k}$. En notant $\varepsilon$ pour $\ell_k$, on obtient donc : (*) $2k\log\left(\frac{k}{\mathrm{e}^2}\right) \sim \log\left(\frac{1}{\pi\varepsilon}\right)$. Comme $\log k > \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha > 0$ et $k$ assez grand, on déduit de (*), $k < \frac{1}{2\mathrm{e}^{2\alpha}}\left(\log\frac{1}{\pi\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, pour $k$ assez grand et $\alpha > 0$.

Les divergences dans le cas (a) et (b) sont comparables. Pourtant, la courbe en (a) est fractale alors que la courbe en (b) est rectifiable (*voir* [6]). □

## Références bibliographiques


[1] Ben Adda F., Cresson J., Dérivée fractionnaire locale et divergence d'échelle, (1999) (en préparation).
[2] Kolwankar K., Gangal A.D., Local fractional derivatives and fractal functions of several variables, in: Proc. of Fractals in Engineering, 1997.
[3] Le Méhauté A., Les géométries fractales, Hermès, 1990.
[4] Nottale L., Scale-relativity and quantization of the universe I, Theoretical framework, Astron. Astrophys. 327 (1997) 867–889.
[5] Oldham K.B., Spanier J., The Fractional Calculus, Academic press, 1974.
[6] Tricot C., Courbes et dimension fractale, 2nd edition, Springer-Verlag, 1999.