C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 831–834, 2001
Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*

Temps d'instabilité des systèmes hamiltoniens initialement hyperboliques

Jacky CRESSON

Équipe de mathématiques de Besançon, CNRS-UMR 6623, Université de Franche-Comté, 16, route de Gray, 25030 Besançon cedex, France
Courriel : cresson@math.univ-fcomte.fr

(Reçu le 17 mai 1999, accepté après révision le 5 mars 2001)

Résumé. Nous calculons le temps de dérive le long d'une chaîne de transition dans un système initialement hyperbolique. On montre que ce temps est polynomial en l'inverse du paramètre perturbateur. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Time of instability for initially hyperbolic Hamiltonian systems

Abstract. *We compute the time of drift along a transition chain for an initially hyperbolic Hamiltonian system. We prove that this time is polynomial with respect to the opposite of the perturbing parameter.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Soit $H_\varepsilon(I,\theta) = h(I) + \varepsilon f(I,\theta)$, $(I,\theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$, $0 < \varepsilon \ll 1$, un système hamiltonien presque intégrable. Lorsque $\varepsilon = 0$, les variables d'action sont *fixes*. Lorsque $\varepsilon \neq 0$, sous une condition de raideur sur h, on peut majorer l'évolution des variables d'action sur un temps exponentiellement long (théorème de Nekhoroshev). Si h est convexe, on a $|I(t) - I(0)| \leqslant c_1\varepsilon^b$ pour $|t| \leqslant c_2 \exp(c/\varepsilon^a)$ avec $a = b = 1/2n$ [8]. Lochak [8] conjecture que ces exposants sont optimaux. En suivant une idée de Chirikov, il propose de démontrer cette conjecture en calculant le temps d'instabilité le long d'une chaîne de transition dans un exemple d'Arnol'd généralisé. Dans [3], Bessi calcule ce temps en utilisant une méthode variationnelle, la relation aux différents paramètres, dynamiques et géométriques, n'est cependant pas claire. Dans cette Note, nous calculons ce temps dans le cadre des systèmes hamiltoniens initialement hyperboliques (*voir* [4]). Notre construction, géométrique, fait apparaître clairement le rôle joué par la dynamique sur les tores hyperboliques et le splitting des variétés invariantes. On montre que ce temps est polynomial en l'inverse du paramètre perturbateur. Cette méthode s'adapte aussi au cas presque intégrable [5].

2. Tores de Graff et chaîne de transition

Soit $H_\mu(J,\phi,p,q)$ un Hamiltonien initialement hyperbolique (*voir* [4,10]), $(J,\phi,p,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}$, et $\phi(t,x)$ son flot.

Note présentée par Charles-Michel MARLE.

S0764-4442(01)01920-6/FLA

DÉFINITION 1. – On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $O_n(x;y)$ une fonction d'ordre $\|x\|^n$ paramétrisée par y. On appelle *tore de Graff* un tore invariant partiellement hyperbolique pour lequel il existe un voisinage V dans lequel le Hamiltonien se met sous la forme normale $\widetilde{H}_\mu(I,\theta,s,u) = \omega I + \lambda su + f(I,su) + \mu g(I,\theta,s,u)$, avec $(I,\theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$, $(s,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $0 < \mu \ll 1$, $f(I,su) = O_2(I,su)$, $g(I,\theta,s,u) = O_2(I,su;I,\theta,s,u)$, $\lambda > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}^n$ satisfait une condition diophantienne $|\omega \cdot k| \geqslant \gamma |k|^{-\tau}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ avec $\tau > n-1$.

Niederman [10] et Eliasson [7] ont démontré que cette forme normale était valable au voisinage des tores hyperboliques des systèmes hamiltoniens presque intégrables obtenus par bifurcation des tores résonnants du système initial le long d'une résonance simple.

2.1. *Section et angle.* – Soit T un tore de Graff pour H_μ. On note $\mathcal{H}$ la variété d'énergie contenant T et V le domaine de la forme normale d'Eliasson–Niederman. On note L_+ (resp. L_-) l'ensemble des variétés lagrangiennes qui coupent $W^+(T)$ (resp. $W^-(T)$) transversalement dans $\mathcal{H}$. On note $\mathcal{G}_+$ (resp. $\mathcal{G}_-$) l'ensemble des éléments de L_+ (resp. L_-) contenus dans V qui possèdent une paramétrisation $\Xi_+ : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \to V$, $\Xi_+(\theta,s) = (\theta, I^+(\theta,s), s, u^+(\theta,s))$, avec $u^+(\theta,s) = \frac{\partial S^+}{\partial s}(\theta,s)$ et $I^+(\theta,s) = \frac{\partial S^+}{\partial \theta}(\theta,s)$ (resp. $\Xi_-(\theta,u) = (\theta, I^-(\theta,u), s^-(\theta,u), u)$ avec $I^-(\theta,u) = \frac{\partial S^-}{\partial \theta}(\theta,u)$ et $s^-(\theta,u) = \frac{\partial S^-}{\partial u}(\theta,u)$) où $S^+(\theta,s)$ (resp. $S^-(\theta,u)$) est une application de classe C^3.

Soit $\Delta \in \mathcal{G}^+$, on note $p^+ = (\theta^+, 0, s^+, 0)$ un point dans l'intersection transverse de Δ avec $W^+(T)$ et Σ^+ la section $\Sigma^+ = \{(I,\theta,s,u) \in V \mid s = s^+\} \cap \mathcal{H}$. La trace de W^+ sur Σ^+ est notée w^+ et celle Δ sur Σ^+, notée δ^+, admet la paramétrisation $\xi^+ : \mathbb{T}^n \to \Sigma^+$, $\theta \to (\theta, I^+(\theta,s^+))$, la variable u étant fixée par la contrainte d'énergie.

Soit A la matrice $A = \mathrm{D}\xi^+(\theta^+)$, cette matrice est symétrique et n'admet que des valeurs propres réelles (*voir* [9]). On appelle angle de Δ avec W^+ le minimum des valeurs propres de A.

2.2. *Chaînes de transition.* – On commence par définir la notion de *famille de chaînes* qui est une version quantitative de la notion classique de *chaîne de transition* [1].

On appelle *chaîne* une suite finie $C = (T_1, \ldots, T_m)$ de tores de Graff de H_μ, contenus dans $\mathcal{H}$, tels que la variété stable $W^+(T_{i+1})$ et la variété instable $W^-(T_i)$ se coupent transversalement dans $\mathcal{H}$.

On note V_i le domaine de la forme normale d'Eliasson–Niederman associé au tore T_i. On note $p_i^+ = (\theta_i^+, 0, s^+, 0)$ (resp. $p_i^- = (\theta_i^-, 0, 0, u_i^-)$) un point d'intersection de $W^-(T_{i-1})$ avec $W^+(T_i)$ (resp. $W^+(T_{i+1})$ avec $W^-(T_i)$) dans V_i et A_i^+ (resp. A_i^-) son angle. On note τ_i, γ_i les constantes diophantiennes du vecteur fréquence du tore T_i et $\beta_{i,i+1} : B_i^- \to B_{i+1}^+$ l'application de transition hétérocline entre T_i et T_{i+1}, avec B_i^- (resp. B_i^+) un voisinage de p_i^- (resp. p_i^+) dans V_i.

On suppose qu'il existe une paramétrisation ξ_i^+ (resp. ξ_i^-) en section de $W^-(T_{i-1})$ (resp. $W^+(T_{i+1})$) dans V_i.

On appelle (μ,τ)-*famille de chaînes* une chaîne C_μ indexée par $\mu \in]0,\mu_0[$ (dont les éléments dépendent de μ). On note $N(\mu)$ le nombre de tores de C_μ.

On suppose qu'il existe des constantes c, C, γ, α, β, δ, ν indépendantes de μ telles que pour tout μ suffisamment petit et $i = 1, \ldots, N(\mu)$, on a : (i) $A_i^+ > c\mu$, $A_i^- > c\mu$; (ii) $\tau_i < \tau$ et $\gamma_i > \gamma$; (iii) le temps de transition hétérocline entre les ouverts B_i^- et B_{i+1}^+, noté $t_{i,i+1}$ est tel que $t_{i,i+1} = \mathrm{O}(\mu^{-\tau+\alpha})$; (iv) on a $\beta_{i,i+1}$ est de classe C^2 et $\|\mathrm{D}^2\beta_{i,i+1}\| < \beta$. Les voisinages B_i^+ (resp. B_i^-) sont de la forme :

$$B_i^+ = \{(\theta,I,s,u) \in V_i \mid |\theta - \theta_i^+| < \mu,\ |I| < \mu,\ |s - s_i^+| < \mu,\ |u| < \mu\},$$

une forme analogue pour p_i^- ; (v) $N(\mu) \leqslant C\mu^{1+\delta}\exp(\mu^\tau)$; (vi) $\|\mathrm{D}^2\xi_i^\sigma\| < \nu$, $\sigma = \pm$.

L'hypothèse (vi) permet un contrôle de l'angle le long des variétés. De même, l'hypothèse (iv) permet un contrôle de l'angle dans une transition hétérocline.

On note $\mathcal{P} = (c, C, \gamma, \alpha, \beta, \delta, \nu)$ l'ensemble des paramètres d'une (μ,τ)-famille de chaînes.

3. Temps d'instabilité le long d'une chaîne de transition

THÉORÈME A. – *Pour toute (μ,τ)-famille de chaînes avec μ suffisamment petit, il existe une trajectoire $z(t)$ de H_μ telle que $z(0)\in B_1^+$ et $z(t_{\text{diff}})\in B^-_{N(\mu)}$ avec $t_{\text{diff}}<c(\mathcal{P})N(\mu)\mu^{-\tau}$.*

Exemple. – Dans [1], Arnol'd considère le système hamiltonien suivant

$$H_\mu(I,\theta,p,q)=\tfrac{1}{2}\,I^2+\tfrac{1}{2}\,p^2+\big(\cos(q)-1\big)\big(1+\mu(\sin\theta_1+\sin\theta_2)\big),$$

où $I=(I_1,I_2)\in\mathbb{R}^2$, $\theta=(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{T}^2$, $(p,q)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T}$, et $0<\mu\ll 1$ est un petit paramètre. On peut montrer, en suivant [1], qu'il existe une $(\mu,1)$-chaîne pour μ suffisamment petit. Une dérive en action d'ordre 1 nécessite μ^{-1} tores. Nous obtenons un temps de dérive d'ordre $1/\mu^2$. Ce résultat est équivalent à celui obtenu par Bernard [3] en utilisant la méthode variationnelle de Bessi [3].

3.1. *Préliminaires*. – On reprend les notations du § 2. Soit $p^-=(\theta^-,0,0,u^-)\in V$ un point de $W^-(T)$, on note B^- le voisinage p^- défini par $B^-=\{z=(\theta,I,s,u)\in V\mid |z-p^-|<\mu\}$. Soit $\ell>0$, un *voisinage ℓ-adapté* à Δ est défini par $\mathcal{B}_\ell=\{z=(\theta,I,s,u)\in V\mid |I-I(\theta,s)|<\ell,\ |u-u(\theta,s)|<\ell\}$. Soit $\kappa>0$, on note H_κ la *bande horizontale* définie par $H_\kappa=\{z\in V\mid 0<u-\mathrm{e}^{-\kappa}(u^-+\mu/2)<\mu\,\mathrm{e}^{-\kappa}/2,\ |I|<\mathrm{e}^{-\kappa},\ |(\theta,s)-(\theta^+,s^+)|<\mu\}$, et $B_{\ell,\kappa}=H_\kappa\cap\mathcal{B}_\ell$.

On note $\mathcal{G}_+^r(\mu)$ l'ensemble des variétés lagrangiennes $\Delta\in\mathcal{G}_+$ d'angle $A>c\mu$ et de paramétrisation ξ en section vérifiant $\|\mathrm{D}^2\xi\|<\nu$. La démonstration du théorème A est basée sur le

LEMME DE TRANSFERT. – *Soient T un tore de Graff de paramètre (λ,τ,γ) et $p^-\in W^-(T)$, il existe un temps κ, appelé temps de transfert, tel que, pour μ suffisamment petit et tout $\Delta\in\mathcal{G}_+^r(\mu)$, on a, pour tout $\ell\leqslant\mu$:* (i) $\phi(\kappa,\Delta\cap B_{\ell,\kappa})\cap B^-\neq\varnothing$; (ii) $\phi(\kappa,\Delta\cap B_{\ell,\kappa})\cap B^-$ *est $\rho=\exp(-\kappa)$ proche en topologie* C^1 *de $W^-(T)$.*

On a $\kappa=\mathrm{O}(\mu^{-\tau})$.

Nous renvoyons à [6] pour la démonstration. Le temps de transfert donne le temps de passage dans chaque domaine de forme normale tant que l'angle d'intersection est d'ordre μ.

Le suivi d'une variété invariante s'effectue grâce au :

LEMME DE TRANSITIVITÉ. – *Soit $F_{\mu,\tau}$ une (μ,τ)-famille de chaîne et C_μ une chaîne. Soient T_1, T_2 et T_3 trois tores de Graff consécutifs de C_μ, alors $W^-(T_1)$ et $W^+(T_3)$ se coupent transversalement dans $\mathcal{H}$. De plus, dans le domaine de la forme normale de T_3 l'angle $\mathcal{A}$ entre $W^-(T_1)$ et $W^+(T_3)$ est tel que $\mathcal{A}>c\mu-M(\beta,\tau,\gamma,c)\exp(\mu^{-\tau})$, où $M(\beta,\tau,\gamma,c)$ est une constante indépendante de μ.*

La démonstration est donnée dans le prochain paragraphe.

3.2. *Démonstration du théorème* A. – On considère une (μ,τ)-famille de chaînes de paramètres c, C, α, β, δ et ν. La démonstration du théorème se fait par une récurrence (finie) sur les tores de la chaîne C_μ.

On note B_{ℓ_i,κ_i} un voisinage de $W^-(T_1)$ dans V_i et A_i^+ l'angle de $W^-(T_1)$ avec $W^+(T_i)$ dans V_i. On a $\kappa_i=C(\gamma_i,\tau_i,c)\mu^{-\tau_i}<C(\gamma,\tau,c)\mu^{-\tau}$ par l'hypothèse (ii) et $\rho_i=\exp(-\kappa_i)<\rho=\exp(-C(\gamma,\tau,c)\mu^{-\tau})$. Par (vi), on a $W^-(T_1)\cap B_2^+\in\mathcal{G}_+^r(\mu)$, donc par le lemme de transfert, il existe B_{ℓ_2,κ_2} tel que $\phi(\kappa_2,B_{\ell_2,\kappa_2})\cap B^-\neq\varnothing$ avec $\kappa_2=C(\gamma_2,\tau_2,c)\mu^{-\tau_2}$. Par le lemme de transitivité, on sait que $W^-(T_1)$ coupe transversalement $W^+(T_3)$ dans V_3 avec un angle $A_3^+>c\mu-M(\beta,\tau_2,\gamma_2,c)\rho$.

Pour μ suffisamment petit, on a donc $A_3^+>c(1-\eta)\mu$ où $\eta=\frac{M(\beta,\tau_2,\gamma_2,c)\rho}{c\mu}\to 0$ lorsque $\mu\to 0$. Par (iv), on a alors $W^-(T_1)\cap B_3^+\in\mathcal{G}_+^r(\mu)$. On peut donc itérer la construction.

Par récurrence, on construit une famille $\mathcal{B}_{\ell_i,\kappa_i}$ de voisinages, telle que $\phi(t^i_{\text{diff}},B_{\ell_2,\kappa_2})\cap B_{\ell_i,\kappa_i}\neq\varnothing$ avec $t^i_{\text{diff}}=\sum_{k=2}^i(\kappa_k+t_{k,k+1})+\kappa_i$ tant que $W^-(T_1)\cap B_i^+\in\mathcal{G}_+^r(\mu)$. Comme $A_i^+>c\mu-iM\rho$, où M est une constante, ceci est possible pour $i\leqslant C\mu^{1+\delta}\exp(\mu^\tau)$. C'est toujours le cas par l'hypothèse (v).

Comme $t_{i,i+1}/\kappa_i=\mathrm{O}(\mu^\alpha)$ d'après l'hypothèse (iii), on a $t_{\text{diff}}<2\sum_{i=2}^{N-1}\kappa_i+\kappa_N$, d'où $t_{\text{diff}}<(N-1)c(\mathcal{P})\mu^{-\tau}$ où $c(\mathcal{P})$ dépend de γ, τ, c et β. □

4. Démonstration du lemme de transitivité

La démonstration utilise la version *quantitative* suivante du lemme de persistance des intersections transverses sous faible perturbation C^2 (*voir* [11]). On reprend les notations du § 2.

LEMME DE PERSISTANCE. – *Soit* $\Delta \in \mathcal{G}_+$, *de paramétrisation* $u^+(\theta, s) = \mathrm{D}u^+(\theta^+, s^+)h + r_u(h)$, $I^+(\theta, s) = \mathrm{D}I^+(\theta^+, s^+)h + r_I(h)$, *où* $h = (\theta - \theta^+, s - s^+)$, r_u, r_I *sont des termes d'ordre* 2 *en* h, *et* D *est la différentielle usuelle.*

On suppose qu'il existe une constante $\delta_1 > 0$ *telle que* $\|\mathrm{D}^2 r_u\| < \delta_1$, $\|\mathrm{D}^2 r_I\| < \delta_1$.

On note pour $r > 0$, $L_r : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \to V$ *le graphe «parallèle» à la variété stable* $W^+(T)$, *définie par* $L_r(\theta, s) = (\theta, s, r, r) + R(\theta, s)$, *où* R *telle que* $\|\mathrm{D}^2 R\| < \delta_2$.

Si l'angle entre Δ *et* $W^+(T)$ *est* $> \sigma$, *alors il existe une intersection transverse entre* L_r *et* Δ *si* $|r| \leqslant C\sigma^2(\delta_1 + \delta_2)^{-1}$, *et* $|z - z^+| < C\sigma(\delta_1 + \delta_2)^{-1}$ *où* $C > 0$ *est une constante,* $z = (\theta, s)$, $z^+ = (\theta^+, s^+)$.

La preuve utilise une version quantitative du théorème des fonctions implicites (*voir* [6], appendice A).

Démonstration du lemme de transitivité. – On a $W^-(T_2)$ qui coupe $W^+(T_3)$ dans V_2 transversalement avec un angle $> c\mu$. Par le lemme de transfert, on a une partie de $W^-(T_1)$ $\exp(C\mu^{-\tau})$-proche en topologie C^1 de $W^-(T_2)$ au voisinage du point d'intersection de $W^+(T_3)$ et $W^-(T_2)$ dans V_2. On a donc une intersection transverse entre $W^{\mathrm{s}}(T_3)$ et $W^{\mathrm{u}}(T_1)$ par le lemme de persistance.

L'hypothèse (iv) nous assure que l'image de $W^-(T_1)$ par $\beta_{2,3}$ est alors $\exp(C\mu^{-\tau})$-proche de celle de $W^-(T_2)$ dans V_3. Comme l'angle d'intersection entre $W^-(T_2)$ et $W^+(T_3)$ est $> c\mu$, on en déduit $\mathcal{A} \geqslant c\mu - M\exp(C\mu^{-\tau})$,où $M > 0$ est une constante dépendant de β via l'hypothèse (iv). □

Références bibliographiques

[1] Arnol'd V.I., Instability of dynamical systems with several degrees of freedom, Soviet Math. Doklady 5 (1964) 581–585.

[2] Bernard P., Perturbation d'un hamiltonien initialement hyperbolique, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 323 (1996) 189–194.

[3] Bessi U., An approach to Arnol'd's diffusion through the calculus of variation, Nonlin. Anal. 26 (1996) 1115–1135.

[4] Chierchia L., Gallavotti G., Drift and diffusion in phase space, Ann. Inst. H. Poincaré 60 (1) (1994) 1–144.

[5] Cresson J., Conjecture de Chirikov et optimalité des exposants de stabilité du théorème de Nekhoroshev, Prépublication 98/40 de l'équipe de mathématiques de Besançon, 1998.

[6] Cresson J., The transfer lemma and the transitivity problem, Prépublication 98/08 de l'équipe de mathématiques de Besançon, 1998.

[7] Eliasson H., Biasymptotic solutions of perturbed integrable Hamiltonian systems, Bol. Soc. Bras. Math. 25 (1) (1994).

[8] Lochak P., Canonical perturbation theory via simultaneous approximation, Russian Math. Surveys 47 (1992) 57–133.

[9] Lochak P., Marco J.-P., Sauzin D., On the splitting of the invariant manifolds in multidimensional near-integrable Hamiltonian systems, Prépublication 99/220, 1999.

[10] Niederman L., Dynamics around a chain of simple resonant tori in nearly integrable Hamiltonian system, J. Differ. Eq. (1999) (à paraître).

[11] Palis J., De Melo W., Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction, Springer-Verlag, 1982.