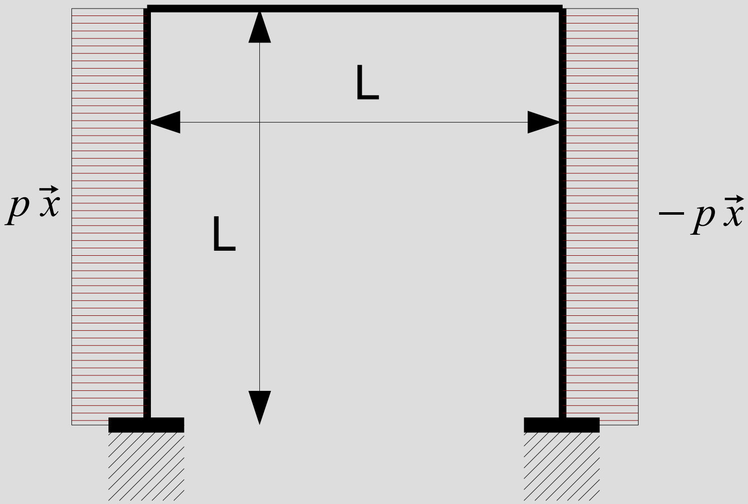
Exercices sur la méthode des déplacements simplifiés

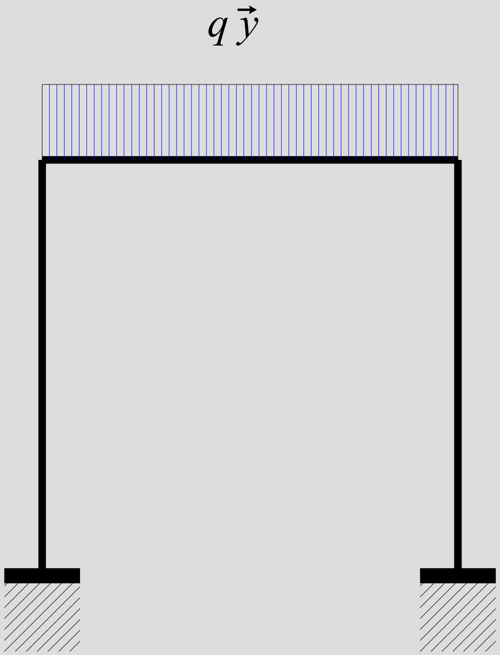
ISA-BTP

Troisième année

Problèmes à traiter



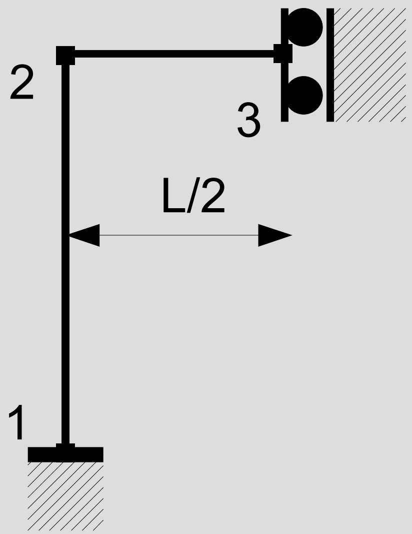
Problème 1



Problème 2

Discrétisation et degrés de liberté

- Deux problèmes symétriques même géométrie et mêmes liaison → Discrétisation identique

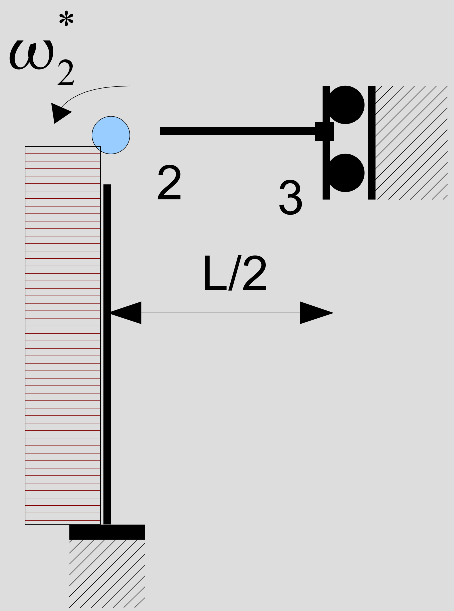


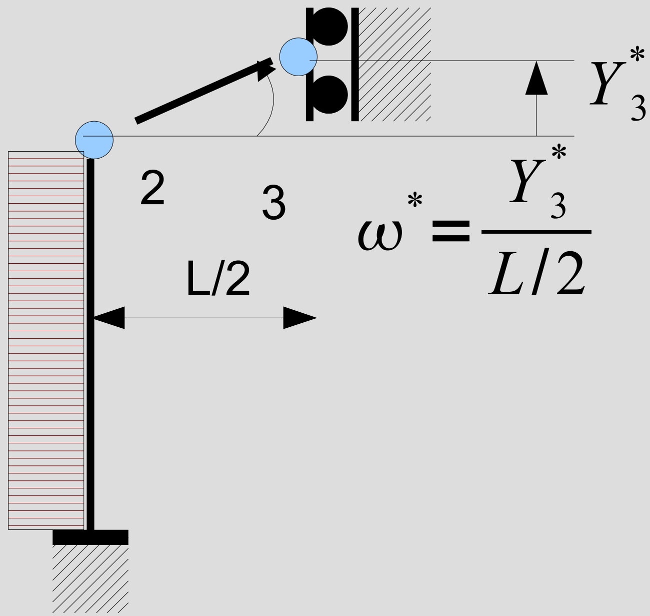
$$\cancel{X_{1}}, \cancel{Y_{1}}, \cancel{\omega_{1}}, \cancel{X_{2}}, \cancel{Y_{2}}, \omega_{2}, \cancel{X_{3}}, Y_{3}, \cancel{\omega_{3}}$$

- Encastrement en 1
- Glissière en 3
- LBI sur [12]
- LBI sur [23]

Degré de libertés : $\omega_2 \; et \; Y_3$

PTV* pour le problème 1





$$\omega^* = \frac{Y_3^*}{L/2}$$

$$-M_{21}\omega_2^* - M_{23}\omega_2^* = 0$$

$$M_{21} + M_{23} = 0 \, (1)$$

$$M_{23}\omega^* + M_{32}\omega^* = 0$$

$$M_{23} + M_{32} = 0$$

Relations de comportement pour le problème 1

$$M_{ij}=\frac{4EI}{L}\omega_{ij}+\frac{2EI}{L}\omega_{ji}+\frac{6EI}{L^2}(v_{ij}-v_{ji})+M_{ij}^0$$

$$M_{ji}=\frac{2EI}{L}\omega_{ij}+\frac{4EI}{L}\omega_{ji}+\frac{6EI}{L^2}(v_{ij}-v_{ji})+M_{ji}^0$$

Sur la barre [12] :

$$M_{ij}^0=\frac{-fL^2}{12} \quad M_{ji}^0=\frac{fL^2}{12} \quad \text{et} \quad p=-f$$

$$M_{12}^0=\frac{pL^2}{12} \quad M_{21}^0=\frac{-pL^2}{12}$$

$$M_{12}=\frac{2EI}{L}\omega_2+\frac{pL^2}{12}$$

$$M_{21}=\frac{4EI}{L}\omega_2-\frac{pL^2}{12}$$

Sur la barre [23] :

$$M_{ij}^0=0 \quad M_{ji}^0=0$$

Attention à L/2 !!

$$M_{23}=\frac{4EI}{L/2}\omega_2+\frac{6EI}{L^2/4}(-Y_3)$$

$$M_{32}=\frac{2EI}{L/2}\omega_2+\frac{6EI}{L^2/4}(-Y_3)$$

Résolution du problème 1

$$M_{21}+M_{23}=0$$

$$\frac{4EI}{L}\omega_2-\frac{pL^2}{12}+\frac{8EI}{L}\omega_2-\frac{24EI}{L^2}Y_3=0$$

$$\frac{12EI}{L}\omega_2-\frac{24EI}{L^2}Y_3=\frac{pL^2}{12}$$

$$L\omega_2-2Y_3=\frac{pL^4}{144\,EI}$$

$$M_{23}+M_{32}=0$$

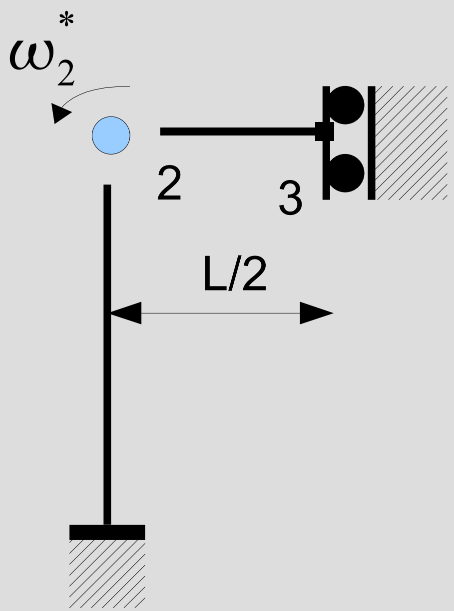
$$\frac{12EI}{L}\omega_2-\frac{48EI}{L^2}Y_3$$

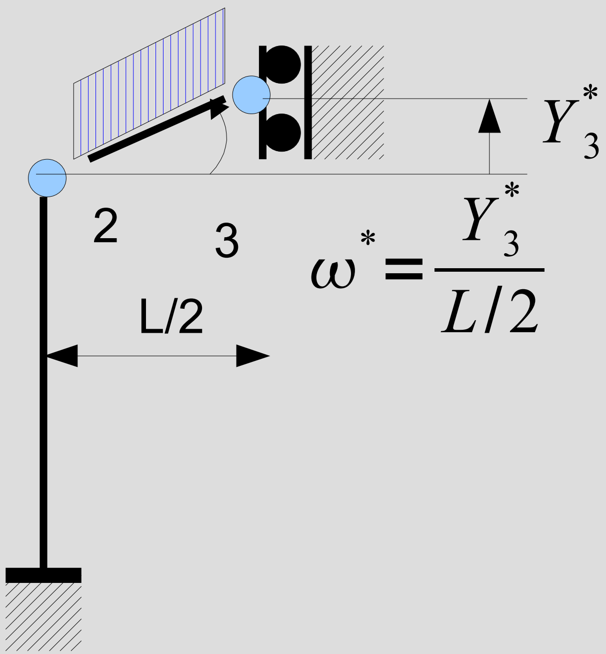
$$L\omega_2=4Y_3$$

$$2Y_3=\frac{pL^4}{144\,EI}$$

$$\boxed{Y_3=\frac{pL^4}{288\,EI} \qquad \omega_2=\frac{pL^3}{72\,EI}}$$

PTV* pour le problème 2





$$\omega^* = \frac{Y_3^*}{L/2}$$

$$-M_{21}\,\omega_2^* - M_{23}\,\omega_2^* = 0$$

$$M_{21} + M_{23} = 0\,(1)$$

$$M_{23}\,\omega^* + M_{32}\,\omega^* + \frac{qL}{2}\,\frac{L}{4}\,\omega^* = 0$$

$$M_{23} + M_{32} = \frac{-qL^2}{8}$$

Relations de comportement pour le problème 2

$$M_{ij} = \frac{4EI}{L}\omega_{ij} + \frac{2EI}{L}\omega_{ji} + \frac{6EI}{L^2}(v_{ij} - v_{ji}) + M^0_{ij}$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L}\omega_{ij} + \frac{4EI}{L}\omega_{ji} + \frac{6EI}{L^2}(v_{ij} - v_{ji}) + M^0_{ji}$$

Sur la barre [12] :

$$M^0_{ij} = 0 \qquad M^0_{ji} = 0$$

$$M_{12} = \frac{2EI}{L}\omega_2$$

$$M_{21} = \frac{4EI}{L}\omega_2$$

Sur la barre [23] :

$$M^0_{ij} = \frac{-f\,(L/2)^2}{12} \qquad M^0_{ji} = \frac{f\,(L/2)^2}{12}$$

$$q = f$$

$$M_{23} = \frac{4EI}{L/2}\omega_2 + \frac{6EI}{L^2/4}(-Y_3) - \frac{qL^2}{48}$$

$$M_{32} = \frac{2EI}{L/2}\omega_2 + \frac{6EI}{L^2/4}(-Y_3) + \frac{qL^2}{48}$$

Résolution du problème 2

$$M_{21}+M_{23}=0$$

$$\frac{4EI}{L}\omega_2+\frac{4EI}{L/2}\omega_2+\frac{6EI}{L^2/4}(-Y_3)-\frac{qL^2}{48}=0$$

$$\frac{12EI}{L}\omega_2-\frac{24EI}{L^2}Y_3=\frac{qL^2}{48}$$

$$L\omega_2-2Y_3=\frac{qL^4}{576\,EI}$$

$$M_{23}+M_{32}=\frac{-qL^2}{8}$$

$$\frac{12EI}{L}\omega_2-\frac{48EI}{L^2}Y_3=\frac{-qL^2}{8}$$

$$L\omega_2-4Y_3=\frac{-qL^4}{96EI}$$

$$\boxed{Y_3=\frac{7qL^4}{1152\,EI} \qquad \omega_2=\frac{qL^3}{72\,EI}}$$