Contrôle de mécanique

Corrigé

25 Octobre 2007

1 Système poutre poteau :

1.1 Discrétisation, analyse des degrés de liberté :

On utilise la discrétisation reportée sur la figure 1.

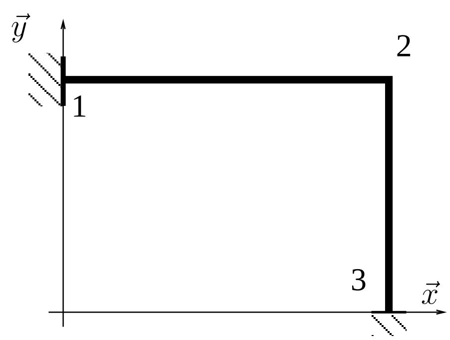

Fig. 1 – Discrétisation

1.1.1 Prise en compte des conditions aux limites :

Le noeud 1 et le noeud 3 sont encastrés, on a donc :
$X_1 = 0,\ Y_1 = 0,\ \Omega_1 = 0,\ X_3 = 0,\ Y_3 = 0,\ \Omega_3 = 0$

1.1.2 Longueurs de barres invariantes :

- Sur la barre $1-2$: $u_{21} = u_{12} = 0$ soit $X_2 = 0$
- Sur la barre $2-3$: $u_{23} = u_{32} = 0$ soit $Y_2 = 0$

Il reste donc comme degré de liberté : $\Omega_2 = \omega_{21} = \omega_{23}$

1.2 Équations d'équilibre :

1.2.1 Application du PPV^* :

L'équation d'équilibre correspondant au degré de liberté Ω_2 est donnée par le déplacement virtuel illustré sur la figure 2.

On obtient donc l'équation d'équilibre suivante : $-M_{21}\Omega_2^* - M_{23}\Omega_2^* = 0$ soit :

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

1.2.2 Comportement :

$M_{21} = \frac{4EL}{3a}\Omega_2 + M_{21}^0$ avec $M_{21}^0 = \frac{9qa^2}{12} = \frac{3qa^2}{4}$
$M_{23} = \frac{4EL}{2a}\Omega_2 + M_{23}^0$ avec $M_{23}^0 = 0$

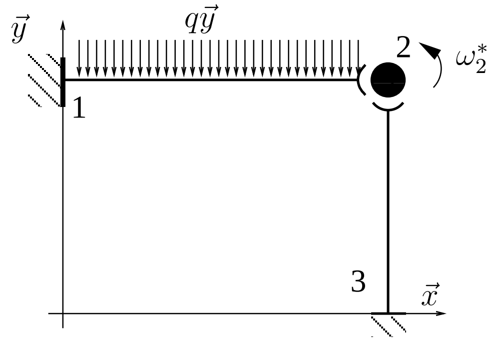

FIG. 2 – Discrétisation

1.2.3 Équation d'équilibre :

$\frac{4EL}{3a}\Omega_2 + \frac{3qa^2}{4} + \frac{2EL}{a}\Omega_2 = 0$ soit

$$\Omega_2 = -\frac{9qa^3}{40EI}$$

1.3 Calcul des efforts aux noeuds :

$M_{12} = \frac{2EI}{3a}\frac{-9qa^3}{40EI} - \frac{3qa^2}{4} = qa^2(-\frac{3}{20} - \frac{3}{4}) = -\frac{9qa^2}{10} = 180kNm$
$M_{21} = \frac{4EI}{3a}\frac{-9qa^3}{40EI} + \frac{3qa^2}{4} = qa^2(-\frac{6}{20} + \frac{3}{4}) = \frac{9qa^2}{20} = -90kNm$
$M_{23} = -M_{21} = 90kNm$
$M_{32} = \frac{2EL}{2a}\Omega_2 = -\frac{9qa^2}{40} = 45kNm$
$V_{12} = \frac{6EI}{9a^2}\Omega_2 - \frac{3qa}{2} = -\frac{6qa}{40} - \frac{3qa}{2} = -\frac{33qa}{20} = 165kN$
$V_{21} = -\frac{6EI}{9a^2}\Omega_2 - \frac{3qa}{2} = \frac{6qa}{40} - \frac{3qa}{2} = -\frac{27qa}{20} = 135kN$
$V_{23} = \frac{6EI}{4a^2}\Omega_2 = -\frac{27qa}{80} = 33,75kN$
$V_{32} = -V_{23} = -33,75kN$
On peut alors faire l'équilibre du noeud 2 et trouver les efforts normaux :

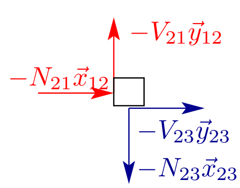

FIG. 3 – Équilibre du noeud 2

$-N_{21} - V_{23} = 0$ soit $N_{21} = \frac{27qa}{80} = -33,75kN$
$N_{23} - V_{21} = 0$ soit $N_{23} = -\frac{27qa}{20} = 135kN$

1.4 Tracé des diagrammes :

1.4.1 Effort normal :

- Dans la barre $1-2$, $N = N_{21} = -33,75kN$
- Dans la barre $2-3$, $n = -N_{23} = -135kN$

1.4.2 Effort tranchant :

- en 1, $V_y = -V_{12} = -175kN$

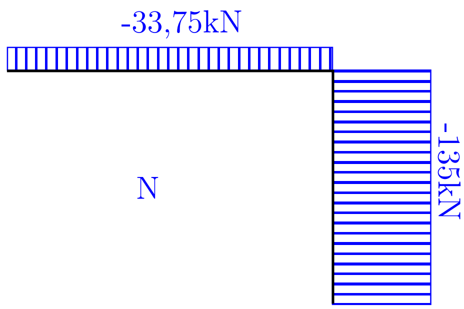

FIG. 4 – Effort Normal

- en 2 sur la barre $1-2$, $V_y = V_{21} = 135kN$
- en 2 sur la barre $2-3$, $V_y = -V_{23} = -33,75kN$
- en 3 sur la barre $2-3$, $V_y = V_{32} = -33,75kN$

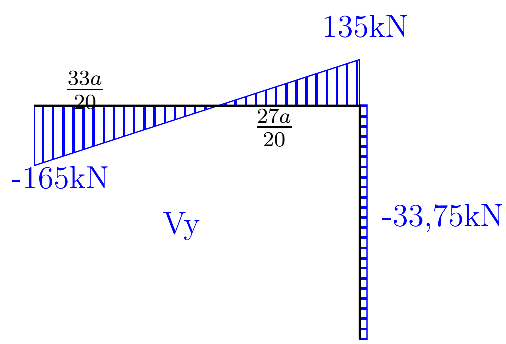

FIG. 5 – Effort Tranchant

1.4.3 Moment fléchissant :

- en 1, $M_{f1} = -M_{12} = \frac{9qa^2}{10} = -180kNm$
- en 2 sur la barre $1-2$, $M_{f2} = M_{21} = \frac{9qa^2}{20} = -90kNm$
- sur la travée $1-2$:
  - Le moment fléchissant est obtenu par supperposition du moment obtenu par variation linéaire entre les points 1 et 2 et celui dû à la charge répartie sur la poutre isostatique. Son maximum est obtenu au point M d'ordonnée $\frac{33a}{20}$ pour lequel l'effort tranchant s'annule.
  - $M_f(M) - M_{f1} = -\int_0^{\frac{33a}{20}} V_y dx$ soit $M_f(M) = \frac{9qa^2}{10} - \frac{33^2qa^2}{2*20^2} = -\frac{369qa^2}{800} = 92,250kNm$
- en 2 sur la barre $2-3$, $M_f = -M_{23} = -90kNm$ (ou continuité)
- en 3 sur la barre $2-3$, $M_f = M_{32} = 45kNm$

2 Bâtiment :

2.1 Discrétisation, analyse des degrés de liberté :

On utilise la discrétisation reportée sur la figure 7.

2.1.1 Prise en compte des conditions aux limites :

Les noeuds 1, 3, 5 et 7 sont encastrés, on a donc :
$X_1 = X_3 = X_5 = X_7 = 0,\ Y_1 = Y_3 = Y_5 = Y_7 = 0,\ \Omega_1 = \Omega_3 = \Omega_5 = \Omega_7 = 0$

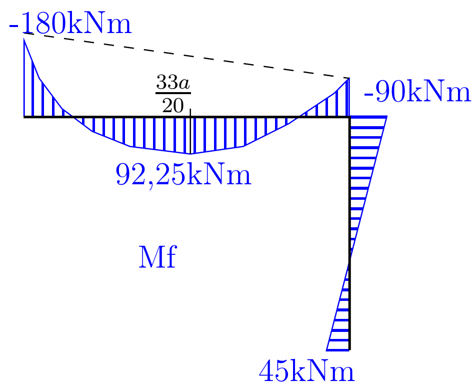

FIG. 6 – Moment fléchissant

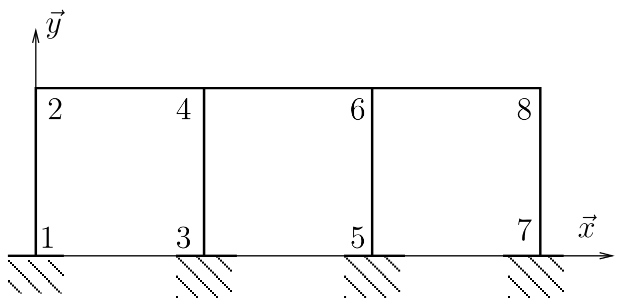

FIG. 7 – Discrétisation

2.1.2 Poutres de grande raideur :

Les rotations extrémité des poutres sont nulles :
$\Omega_2 = \Omega_4 = \Omega_6 = \Omega_8 = 0$

2.1.3 Longueurs de barres invariantes :

- Sur les poteaux : $Y_2 = Y_4 = Y_6 = Y_8 = 0$,
- Sur les poutres : $X_2 = X_4 = X_6 = X_8$

Il reste donc le déplacement horizontal du premier niveau comme degré de liberté : $X = -v_{21} = -v_{43} = -v_{65} = -v_{87}$

2.2 Équations d'équilibre :

2.2.1 Application du PPV^* :

L'équation d'équilibre correspondant au degré de liberté X est donnée par le déplacement virtuel illustré sur la figure 8.

La rotation ω^* et le déplacement X^* sont liés par la relation $X^* = -H\omega^*$(sur la figure $X^* > 0$ et $\omega^* < 0$)

On obtient donc l'équation d'équilibre suivante :
$FX^* + (M_{21} + M_{12} + M_{34} + M_{43} + M_{56} + M_{65} + M_{78} + M_{87})\Omega^* = 0$ soit :

$$M_{21} + M_{12} + M_{34} + M_{43} + M_{56} + M_{65} + M_{78} + M_{87} = FH$$

2.2.2 Comportement :

$M_{12} = M_{34} = M_{56} = M_{78} = \frac{6EI}{H^2}X$ et $M_{21} = M_{43} = M_{65} = M_{87} = \frac{6EI}{H^2}X$

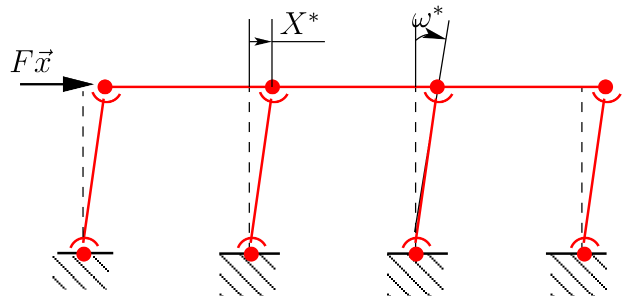

FIG. 8 – Discrétisation

2.2.3 Équation d'équilibre :

$8\frac{6EI}{H^2}X = FH$

$$X = \frac{FH^3}{48EI}$$

2.3 Diagramme du moment fléchissant :

$M_{ij} = \frac{6EI}{H^2}X = \frac{FH}{8} = M_{ji}$
On obtient donc :
$M_f(1) = M_f(3) = M_f(5) = M_f(7) = -\frac{FH}{8}$ et
$M_f(2) = M_f(4) = M_f(6) = M_f(8) = \frac{FH}{8}$

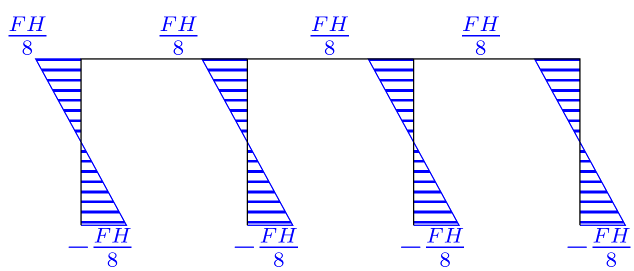

FIG. 9 – Moment fléchissant

3 Portique :

3.1 Discrétisation, analyse des degrés de liberté :

On utilise la discrétisation reportée sur la figure 10.

3.1.1 Prise en compte des conditions aux limites :

Le noeud 1 et 4 sont encastrés, on a donc :
$X_1 = 0,\ Y1 = 0,\ \Omega_1 = 0,\ X_4 = 0,\ Y_4 = 0,\ \Omega_4 = 0$

3.1.2 Longueurs de barres invariantes :

- Sur la barre $1-2$: $u_{21} = u_{12} = 0$ soit $Y_2 = 0$
- Sur la barre $2-3$: $u_{23} = u_{32} = 0$ soit $X_2 = X_3$
- Sur la barre $3-4$: $u_{34} = u_{43} = 0$ soit $Y_3 = 0$

Il reste donc comme degé de liberté : Ω_2, Ω_3 et $X = X_2 = X_3$

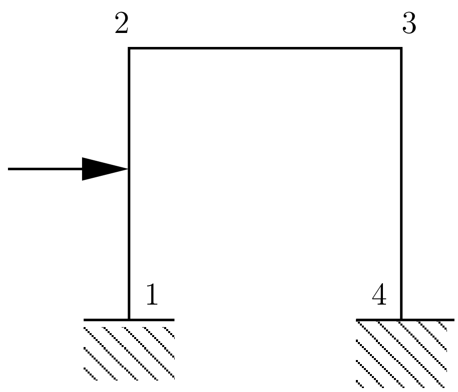

FIG. 10 – Discrétisation

3.2 Équations d'équilibre :

3.2.1 Application du PPV^* :

Les équations d'équilibre correspondant au degrés de liberté Ω_2 et Ω_3 sont triviales :

$$M_{21} + M_{23} = 0 \tag{1}$$

$$M_{32} + M_{34} = 0 \tag{2}$$

Le mouvement virtuel associé au degré de liberté X est illustré sur la figure 11.

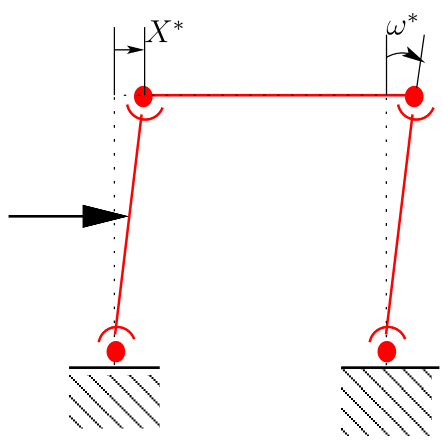

FIG. 11 – Déplacement virtuel associe à X

Avec $X^* = -L\omega^*$, le déplacement virtuel du point d'application de la force $\vec{F}$ est $\frac{X^*}{2} = -\frac{L\omega}{2}$
On obtient donc l'équation d'équilibre suivante :
$-F\frac{L\omega^*}{2} + (M_{12}{+}M_{21} + M_{34} + M_{43})\omega^* = 0$ soit :

$$M_{12} + M_{21} + M_{34} + M_{43} = \frac{FL}{2} \tag{3}$$

3.2.2 Comportement :

Nous avons $X = -v_{21} = v_{34}$et $F\vec{x} = -F\vec{y_{12}} \Rightarrow M^0_{12} = \frac{FL}{8}$ et $M^0_{21} = -\frac{FL}{8}$
$M_{12} = \frac{2EI}{L}\Omega_2 + \frac{6EI}{L^2}(-(-X)) + \frac{FL}{8}$

$M_{21} = \frac{4EI}{L}\Omega_2 + \frac{6EI}{L^2}(-(-X)) - \frac{FL}{8}$
$M_{23} = \frac{4EI}{L}\Omega_2 + \frac{2EI}{L}\Omega_3$
$M_{32} = \frac{2EI}{L}\Omega_2 + \frac{4EI}{L}\Omega_3$
$M_{34} = \frac{4EI}{L}\Omega_3 + \frac{6EI}{L^2}X$
$M_{43} = \frac{2EI}{L}\Omega_3 + \frac{6EI}{L^2}X$

3.2.3 Équations d'équilibre :

L'équation 1 devient : $\frac{8EI}{L}\Omega_2 + \frac{2EI}{L}\Omega_3 + \frac{6EI}{L^2}X = \frac{FL}{8}$
L'équation 2 devient : $\frac{2EI}{L}\Omega_2 + \frac{8EI}{L}\Omega_3 + \frac{6EI}{L^2}X = 0$
L'équation 3 devient : $\frac{6EI}{L}\Omega_2 + \frac{6EI}{L}\Omega_3 + \frac{24EI}{L^2}X = \frac{FL}{2}$
On obtient donc finalement le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rc} 4L\Omega_2 + L\Omega_3 + 3X = & \frac{FL^3}{16EI} \\ L\Omega_2 + 4L\Omega_3 + 3X = & 0 \\ L\Omega_2 + L\Omega_3 + 4X = & \frac{FL^3}{12EI} \end{array} \right.$$