

# Exercice : Calcul d'un bâtiment par la méthode des déplacements simplifiés

ISA BTP troisième année

Année 2016–2017

## Sujet :

Un bâtiment à 2 niveaux est représenté sur la figure 1. On supposera que les poutres ont une rigidité infinie devant celle des poteaux.

1. Hypothèse : montrer que cette condition impose que les rotations des noeuds extrémité des poutres sont nulles.
2. Discrétisation : discrétiser, dénombrer les inconnues et écrire les équations du PTV\*
3. Résoudre.
4. Tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant dans les poteaux.

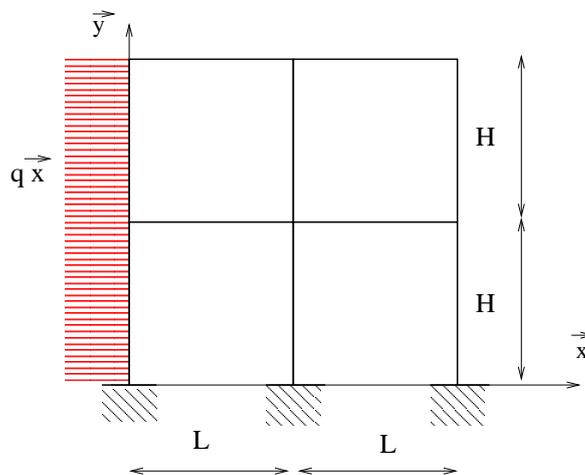


FIGURE 1: Bâtiment

## 1 Hypothèses

Les planchers sont supposés infiniment rigides par rapport aux poteaux, ils ont donc un mouvement de solide. Les hypothèses de longueur de barres invariables sur les poteaux imposent donc que les mouvements des planchers soient horizontaux.

## 2 Discrétisation

On adopte la discrétisation représentée sur la figure 2. Les numérotations orientent tous les poteaux du bas vers le haut afin de rendre les équations plus facile à écrire par la suite.

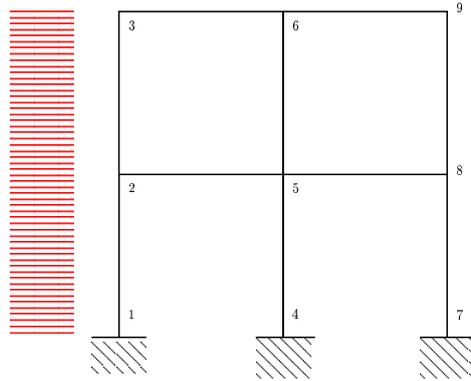


FIGURE 2: Bâtiment

### 2.1 Degrés de liberté

- Encastrements en 1,4 et 7 :
  - $u_{x1} = u_{y1} = u_{x4} = u_{y4} = u_{x7} = u_{y7} = 0$ ,
  - $\omega_1 = \omega_4 = \omega_7 = 0$
- Les rotations des planchers sont nulles :
  - $\omega_2 = \omega_3 = \omega_5 = \omega_6 = \omega_8 = \omega_9 = 0$
- Longueurs de barres invariantes dans les poteaux
  - $u_{y2} = u_{y3} = u_{y1} = 0$
  - $u_{y5} = u_{y6} = u_{y4} = 0$
  - $u_{y8} = u_{y9} = u_{y7} = 0$
- Longueurs de barres invariantes dans les planchers
  - $u_{x2} = u_{x5} = u_{x8}$
  - $u_{x3} = u_{x6} = u_{x9}$

Il reste donc deux degrés de liberté qui correspondent aux déplacements horizontaux des niveaux 1 et 2 :  $u_{x2} = u_{x5} = u_{x8}$  et  $u_{x3} = u_{x6} = u_{x9}$ .

### 2.2 Équations du $PTV^*$

- Pour chaque degré de liberté, on met en place un déplacement virtuel qui :
- met en œuvre le mouvement correspondant ;
  - respecte les liaisons ;
  - rend les barres indéformables (de façon à ce que la contribution des sollicitations au travail virtuel des efforts intérieurs soit nulle) ;
  - peut rompre les liaisons entre les barres et les nœuds (le choix de les rompre uniquement en rotation rend souvent les problèmes plus facile à résoudre) ;
  - on fait le choix des déplacements virtuels qui vont rendre les calculs de  $W_{int}^*$  les plus faciles, donc on rompt un minimum de liaisons.

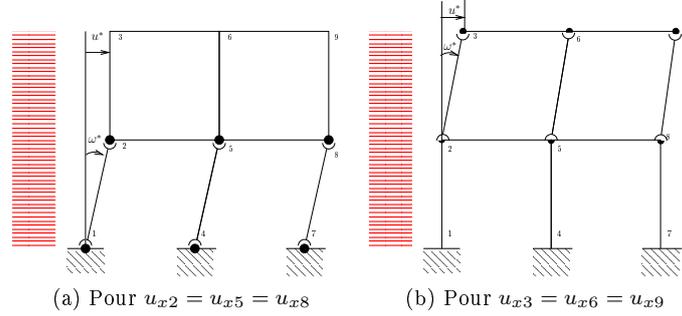


FIGURE 3: Champs de déplacements virtuels

Pour un mouvement virtuel linéaire en fonction de l'abscisse, les travaux virtuels des charges uniformément réparties peuvent être calculés par le produit de la résultante de la charge par le déplacement du milieu du segment sur laquelle elle s'applique. On fait donc le calcul sur les barres [12] et [23] séparément.

Dans les deux cas, les barres sont en rotation, le travail virtuel des efforts intérieurs est la somme des produits des moments des nœuds sur les barres par les rotations des barres.

**Pour  $u_{x2} = u_{x5} = u_{x8}$  on obtient :**

$$W_{ext}^* = qHu^* + qH\frac{u^*}{2} = \frac{3}{2}Hu^*$$

$$W_{int}^* = (M_{12} + M_{21})\omega^* + (M_{45} + M_{54})\omega^* + (M_{78} + M_{87})\omega^*$$

et  $u^* = -H\omega^*$  ( $\omega^*$  est négatif sur le dessin pour un  $u^*$  positif, les rotations virtuelles sont infiniment petites et la tangente est égale à l'angle).

On obtient donc :

$$(M_{12} + M_{21})\omega^* + (M_{45} + M_{54})\omega^* + (M_{78} + M_{87})\omega^* - \frac{3}{2}qH^2\omega^* = 0, \forall\omega^*$$

$$\boxed{M_{12} + M_{21} + M_{45} + M_{54} + M_{78} + M_{87} = \frac{3}{2}qH^2} \quad (1)$$

**Pour  $u_{x3} = u_{x6} = u_{x9}$  on obtient :**

$$W_{ext}^* = qH\frac{u^*}{2}$$

$$W_{int}^* = (M_{23} + M_{32})\omega^* + (M_{56} + M_{65})\omega^* + (M_{89} + M_{98})\omega^*$$

et  $u^* = -H\omega^*$

Soit :

$$\boxed{M_{23} + M_{32} + M_{56} + M_{65} + M_{89} + M_{98} = \frac{1}{2}qH^2} \quad (2)$$

## 3 Résolution

### 3.1 Comportement

Il s'agit dans un premier temps d'exprimer les équations 1 et 2 du  $PTV^*$  en fonction des degrés de liberté  $u_{x2}$  et  $u_{x3}$ . Pour ceci on utilise les équations de comportement rappelées 3 et 4.

$$M_{12} + M_{21} = \frac{12EI}{H^2}(v_{12} - v_{21}) + M_{12}^0 + M_{21}^0 \text{ avec}$$

$$- v_{12} = -u_{x1} = 0$$

- $v_{21} = -u_{x2}$  ( $v_{21}$  est compté positif dans la direction de  $\vec{y}_{12} = -\vec{x}$ )
  - La charge appliqué est  $q\vec{x} = -q\vec{y}_{12}$  donc  $M_{12}^0 = \frac{qH^2}{12}$  et  $M_{21}^0 = -\frac{qH^2}{12}$
- On obtient donc  $M_{12} + M_{21} = \frac{12EI}{H^2}u_{x2}$   
de la même manière  $M_{45} + M_{54} = M_{78} + M_{87} = \frac{12EI}{H^2}u_{x2}$   
L'équation 1 devient  $3\frac{12EI}{H^2}u_{x2} = \frac{3}{2}qH^2$

$$\boxed{u_{x2} = \frac{qH^4}{24EI}}$$

- $M_{23} + M_{32} = \frac{12EI}{H^2}(v_{23} - v_{32}) + M_{23}^0 + M_{32}^0$  avec
- $v_{23} = -u_{x2}$
  - $v_{32} = -u_{x3}$
  - $M_{23}^0 = \frac{qH^2}{12}$  et  $M_{32}^0 = -\frac{qH^2}{12}$
- On obtient donc  $M_{23} + M_{32} = \frac{12EI}{H^2}(u_{x3} - u_{x2})$   
de la même manière  $M_{56} + M_{65} = M_{89} + M_{98} = \frac{12EI}{H^2}u_{x2}$   
L'équation 2 devient  $3\frac{12EI}{H^2}(u_{x3} - u_{x2}) = \frac{1}{2}qH^2$

$$\boxed{(u_{x3} - u_{x2}) = \frac{qH^4}{72EI}}$$

$$\boxed{u_{x3} = \frac{qH^4}{18EI}}$$

## 4 Tracé des diagrammes dans les poteaux :

Le chargement étant réparti, il est conseillé de tracer le diagramme des efforts tranchants dans un premier temps.

### 4.1 Diagramme des $V_y$

Dans la barre [12]

$$V_{12} = \frac{12EI}{H^3}(v_{12} - v_{21}) + V_{12}^0 = \frac{12EI}{H^3}u_{x2} + \frac{qH}{2}$$

$$V_{12} = \frac{qH}{2} + \frac{qH}{2} = qH, \quad V_{12} = -\frac{qH}{2} + \frac{qH}{2} = 0$$

$$\boxed{V_y(1) = -V_{12} = -qH \quad V_y(2) = V_{21} = 0}$$

Dans la barre [23]

$$V_{23} = \frac{12EI}{H^3}(v_{23} - v_{32}) + V_{12}^0 = \frac{12EI}{H^3}(u_{x3} - u_{x2}) + \frac{qH}{2}$$

$$V_{23} = \frac{qH}{6} + \frac{qH}{2} = \frac{2qH}{3}, \quad V_{12} = -\frac{qH}{6} + \frac{qH}{2} = \frac{qH}{3}$$

$$\boxed{V_y(2) = -V_{23} = -\frac{2qH}{3} \quad V_y(3) = V_{32} = \frac{qH}{3}}$$

Dans les barres [45] et [78]

$$V_{45} = -V_{54} = \frac{12EI}{H^3}(v_{45} - v_{54}) = \frac{12EI}{H^3}u_{x2} = \frac{qH}{2}$$

$$\boxed{V_y(4) = V_y(5) = -\frac{qH}{2} = V_y(7) = V_y(8)}$$

Dans les barres [56]et [89]

$$V_{56} = -V_{65} = \frac{12EI}{H^3}(v_{56} - v_{65}) = \frac{12EI}{H^3}(u_{x3} - u_{x2}) = \frac{qH}{6}$$

$$V_y(5)=V_y(6)=-\frac{qH}{6} = V_y(8)=V_y(9)$$

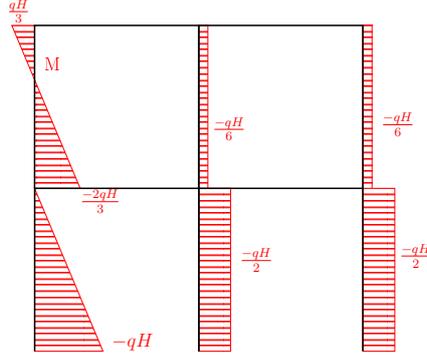


FIGURE 4: Diagramme des efforts tranchants  $V_y$

## 4.2 Diagrammes des moments $M_{fz}$

Dans la barre [12]

$$M_{12} = \frac{6EI}{H^2}u_{x2} + M_{12}^0 = \frac{qH^2}{4} + \frac{qH^2}{12} = \frac{qH^2}{3}$$

$$M_{21} = \frac{6EI}{H^2}u_{x2} + M_{21}^0 = \frac{qH^2}{4} - \frac{qH^2}{12} = \frac{qH^2}{6}$$

L'effort tranchant s'annule au nœud 2 qui correspond à l'extremum de la parabole.

$$M_{fz}(1)=-M_{12}=-\frac{qH^2}{3} \quad M_{fz}(2)=M_{21}=\frac{qH^2}{6}$$

Dans la barre [23]

$$M_{23} = \frac{6EI}{H^2}(u_{x3} - u_{x2}) + M_{23}^0 = \frac{qH^2}{12} + \frac{qH^2}{12} = \frac{qH^2}{6}$$

$$M_{32} = \frac{6EI}{H^2}(u_{x3} - u_{x2}) + M_{32}^0 = \frac{qH^2}{12} - \frac{qH^2}{12} = 0$$

$$M_{fz}(2)=-\frac{qH^2}{6} \quad M_{fz}(3)=0$$

L'effort tranchant s'annule au point M d'abscisse  $\frac{2H}{3}$  qui correspond à l'extremum de la parabole.

$$M_{fz}(3) - M_{fz}(M) = -\int_M^3 V_y dx = -\frac{1}{2} \frac{qH}{3} \frac{H}{3} = -\frac{qH^2}{18}$$

$$M_{fz}(M)=\frac{qH^2}{18}$$

Dans les barres [45]et [78]

$$M_{fz}(4) = M_{fz}(7) - M_{45} = -\frac{6EI}{H^2}u_{x2} = -\frac{qH^2}{4}$$

$$M_{fz}(5) = M_{fz}(8) = M_{54} = \frac{6EI}{H^2}u_{x2} = \frac{qH^2}{4}$$

Dans les barres [56]et [89]

$$M_{fz}(5) = M_{fz}(8) - M_{56} = -\frac{6EI}{H^2} (u_{x3} - u_{x2}) = -\frac{qH^2}{12}$$

$$M_{fz}(6) = M_{fz}(9) = M_{65} = \frac{6EI}{H^2} (u_{x3} - u_{x2}) = \frac{qH^2}{12}$$

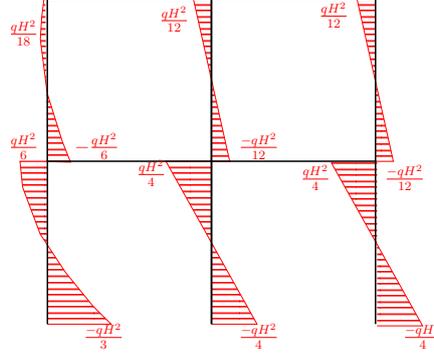


FIGURE 5: Diagramme des moments fléchissants  $M_{fz}$

## Rappels :

Pour une poutre de longueur  $l_{ij}$ , de module d'élasticité  $E$  et d'inertie de flexion  $I$  :

$$M_{ij} = \frac{4EI}{l_{ij}}\omega_{ij} + \frac{2EI}{l_{ij}}\omega_{ji} + \frac{6EI}{l_{ij}^2}(v_{ij} - v_{ji}) + M_{ij}^0 \quad (3)$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{l_{ij}}\omega_{ij} + \frac{4EI}{l_{ij}}\omega_{ji} + \frac{6EI}{l_{ij}^2}(v_{ij} - v_{ji}) + M_{ji}^0 \quad (4)$$

$$V_{ij} = \frac{6EI}{l_{ij}^2}(\omega_{ij} + \omega_{ji}) + \frac{12EI}{l_{ij}^3}(v_{ij} - v_{ji}) + V_{ij}^0 \quad (5)$$

$$V_{ji} = -\frac{6EI}{l_{ij}^2}(\omega_{ij} + \omega_{ji}) - \frac{12EI}{l_{ij}^3}(v_{ij} - v_{ji}) + V_{ji}^0 \quad (6)$$

— pour une charge uniformément répartie  $f y_{ij}$  appliquée sur la travée  $[IJ]$  :

$$M_{ij}^0 = -\frac{fl_{ij}^2}{12}, M_{ji}^0 = \frac{fl_{ij}^2}{12}, V_{ij}^0 = V_{ji}^0 = -\frac{fl_{ij}}{2}$$

— pour une charge concentrée  $F y_{ij}$  appliquée en milieu de travée  $[IJ]$  :

$$M_{ij}^0 = -\frac{Fl_{ij}}{8}, M_{ji}^0 = \frac{Fl_{ij}}{8}, V_{ij}^0 = V_{ji}^0 = -\frac{F}{2}$$