Méthode des déplacements simplifiés
Résumé

ISA-BTP troisième année
Christian la Borderie

Année 2015-2016

Repère local : Le repère local orthonormé pour la barre $[IJ]$ $(I < J)$ est défini par $\vec{x}_{ij} = \frac{\vec{IJ}}{||\vec{IJ}||}$ (Voir figure 1). L'ordre de la numérotation donne l'orientation de la barre.

Actions des nœuds sur la barre (Figure 2) :

$\vec{F}_{(I/[IJ])} = N_{ij}\vec{x}_{ij} + V_{ij}\vec{y}_{ij}$ $\quad \vec{M}_{(I/[IJ])} = M_{ij}\vec{z}$

$\vec{F}_{(J/[IJ])} = N_{ji}\vec{x}_{ij} + V_{ji}\vec{y}_{ij}$ $\quad \vec{M}_{(J/[IJ])} = M_{ji}\vec{z}$

Les actions du noeud J sur la barre $[IJ]$ sont les actions de Ω^+/Ω^- et sont donc confondues avec les sollicitations

Les actions du noeud I sur la barre $[IJ]$ sont les actions de Ω^-/Ω^+ et sont donc opposées aux sollicitations

$$\begin{cases} N(J) & = N_{ji} \\ V_y(J) & = V_{ji} \\ M_{fz}(J) & = M_{ji} \end{cases} \qquad \begin{cases} N(I) & = -N_{ij} \\ V_y(I) & = -V_{ij} \\ M_{fz}(I) & = -M_{ij} \end{cases}$$

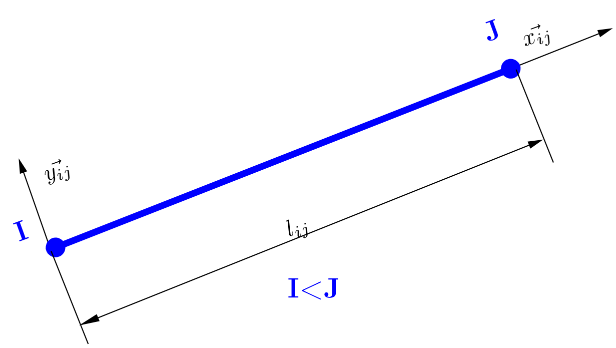

FIGURE 1 – Repère local

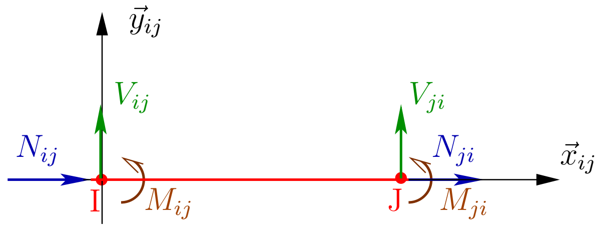

FIGURE 2 – Efforts des noeuds sur les barres

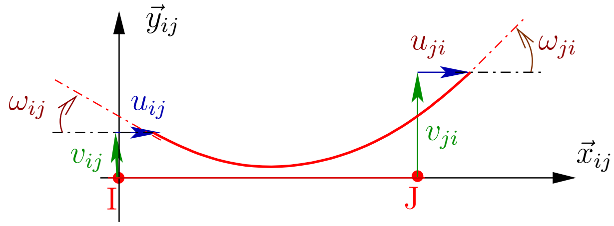

FIGURE 3 – Déplacements des noeuds

Déplacements des nœuds :
$\vec{U}(I) = u_{ij}\vec{x}_{ij} + v_{ij}\vec{y}_{ij}$ $\quad\vec{\Omega}(I) = \omega_{ij}\vec{z} = \omega_i\vec{z}$
$\vec{U}(J) = u_{ji}\vec{x}_{ij} + v_{ji}\vec{y}_{ij}$ $\quad\vec{\Omega}(J) = \omega_{ji}\vec{z} = \omega_j\vec{z}$

Comportement d'une barre $[IJ]$, $i < j$:
Pour une poutre de longueur l_{ij} , de module d'élasticité E et d'inertie de flexion I :
$M_{ij} = \frac{4EI}{l_{ij}}\omega_{ij} + \frac{2EI}{l_{ij}}\omega_{ji} + \frac{6EI}{l_{ij}^2}(v_{ij} - v_{ji}) + M_{ij}^0$
$M_{ji} = \frac{2EI}{l_{ij}}\omega_{ij} + \frac{4EI}{l_{ij}}\omega_{ji} + \frac{6EI}{l_{ij}^2}(v_{ij} - v_{ji}) + M_{ji}^0$
$V_{ij} = \frac{6EI}{l_{ij}^2}(\omega_{ij} + \omega_{ji}) + \frac{12EI}{l_{ij}^3}(v_{ij} - v_{ji}) + V_{ij}^0$
$V_{ji} = -\frac{6EI}{l_{ij}^2}(\omega_{ij} + \omega_{ji}) - \frac{12EI}{l_{ij}^3}(v_{ij} - v_{ji}) + V_{ji}^0$

— pour une charge répartie $f\vec{y_{ij}}$ appliquée sur la travée :

$M_{ij}^0 = -\frac{fl_{ij}^2}{12}$, $M_{ji}^0 = \frac{fl_{ij}^2}{12}$, $V_{ij}^0 = V_{ji}^0 = -\frac{fl_{ij}}{2}$

— pour une charge concentrée $F\vec{y_{ij}}$ appliquée en milieu de travée :

$M_{ij}^0 = -\frac{Fl_{ij}}{8}$, $M_{ji}^0 = \frac{Fl_{ij}}{8}$, $V_{ij}^0 = V_{ij}^0 = -\frac{F}{2}$

Étapes de résolution :

1. Discrétisation :
On positionne des nœuds de façon à découper la structure en éléments de poutres droites. *La numérotation oriente le sens de parcours des poutres du plus petit numéro de nœud vers le plus grand. On peut positionner des*

nœuds aux points d'applications des charges concentrées ou utiliser les M_{ij}^0 et V_{ij}^0.

2. Dénombrement des inconnues :
   Les inconnues sont les déplacements et rotations des nœuds qui ne sont pas contraints soit par des liaisons soit par l'hypothèse des longueurs de barres invariantes. Dans le cas des bâtiments poutre-poteau on utilise également la rotation nulle des planchers. *Les inconnues dépendent de la géométrie et des liaisons mais pas du chargement extérieur.*

3. Équations d'équilibre :
   On applique le PTV^*autant de fois qu'il y a de degrés de liberté. Pour chaque degré de liberté, on choisit un champ de déplacement virtuel qui mobilise de degré de liberté considéré, qui respecte les liaisons et qui rend les poutres rigides. Les liaisons entre poutres et nœuds peuvent être rompues (généralement en rotation).
   $W_{ext}^* + W_{int}^* = 0$

4. Comportement :
   On remplace les M_{ij} et V_{ij} intervenant dans les équations par les degrés de liberté identifiées en 2. *On peut utiliser ici des conditions complémentaires découlant des symétries.*

5. Résolution :
   Résoudre le système

— Tracé des diagrammes :
  Dans le cas de charges réparties, il est souvent nécessaire de tracer le diagramme de V_y en premier.
  $V_y(I) = -V_{ij}$, $V_y(J) = V_{ji}$, $M_{fz}(I) = -M_{ij}$, $M_{fz}(J) = M_{ji}$.
  Pour calculer les efforts normaux, il faut utiliser l'équilibre des nœuds.