

Méthode des déplacements

Institut Supérieur Aquitain du Bâtiment et des Travaux Publics



Table des matières

I	Principe des puissances virtuelles (PPV^*) :	4
1	Introduction :	4
2	Énoncé :	4
3	Utilisation du PPV^*	4
3.1	Calcul des puissances virtuelles :	4
3.2	Comment utiliser le PPV^* ?	5
3.3	Exemple de calcul d'actions extérieures :	6
3.3.1	Calcul de Y_B	6
3.3.2	Calcul de Y_A	7
3.3.3	Calcul de X_A	7
3.3.4	Autres possibilités :	8
II	Méthode des déplacements :	9
4	Introduction :	9
5	Notations :	9
5.1	Repère local :	9
5.2	Actions des nœuds sur la barre :	9
5.3	Déplacements des nœuds :	9
6	Comportement d'une barre $[IJ], i < j$:	10
6.1	Cas d'une barre non chargée :	10
6.1.1	Cas de l'allongement raccourcissement :	10
6.1.2	Cas de rotations :	11
6.1.3	Cas des déplacements :	13
6.1.4	Cas général :	13
6.2	Cas d'une barre chargée	13
7	Hypothèse des longueurs de barres invariantes (méthode des déplacements simplifiée).	14
8	Cas particulier des bâtiments de type poutre - poteau	14
9	Étapes de résolution (méthode des déplacements simplifiée) :	16
III	Exemples :	17
10	Portique bi-encasté	17
10.1	Discrétisation	17
10.2	Dénombrement des inconnues	17
10.3	Équations d'équilibre	17
10.4	Comportement :	19
10.5	Résolution :	19
10.6	Calcul des efforts aux nœuds :	20
10.7	Tracé des diagrammes	20

11 Système poutre poteau :	21
11.1 Discrétisation :	21
11.2 Dénombrement des inconnues	21
11.3 Équations d'équilibre :	22
11.4 Comportement :	22
11.5 Résolution :	22
11.6 Calcul des efforts aux nœuds et tracé des diagrammes :	23
11.7 Tracé des diagrammes :	23
12 Bâtiment à 1 niveau :	25
12.1 Discrétisation :	25
12.2 Dénombrement des inconnues	25
12.3 Équations d'équilibre :	25
12.4 Comportement :	26
12.5 Résolution :	26
12.6 Calcul des efforts aux nœuds	26
12.7 Tracé des diagrammes :	26
13 Bâtiment à 2 niveaux :	26
13.1 Hypothèses	27
13.2 Discrétisation	27
13.3 Degrés de liberté	27
13.4 Équations d'équilibre	28
13.5 Comportement	29
13.6 Résolution	29
13.7 Tracé des diagrammes dans les poteaux :	29
13.7.1 Diagramme des V_y	29
13.7.2 Diagrammes des moments M_{fz}	30
14 Bâtiment à 4 niveaux :	31
14.1 Discrétisation	31
14.2 Dénombrement des inconnues :	31
14.3 Équations d'équilibre :	32
14.4 Comportement	33
14.5 Résolution	33
14.6 Calcul des efforts aux nœuds :	34
14.7 Tracé des diagrammes	34

Première partie

Principe des puissances virtuelles (PPV^*) :

1 Introduction :

C'est un outil puissant qui joue le même rôle que le principe fondamental de la statique (ou de la dynamique), mais qui permet une mise en œuvre des équations plus systématique. On doit le premier énoncé du "principe des vitesses virtuelles" au mathématicien et philosophe Jean Le Rond D'Alembert qui servi de base aux travaux de Lagrange sur la mécanique Céleste.



FIGURE 1: Jean Le Rond D'Alembert

2 Énoncé :

Dans un référentiel Galiléen et pour une chronologie absolue, la puissance virtuelle des quantités d'accélération d'un système Ω est égale à la puissance de toutes les forces appliquées au système, tant intérieures qu'extérieures, quelque soit le mouvement virtuel de Ω considéré.

$$P_{int}^* + P_{ext}^* = P_{acc}^*, \quad \forall V^*$$

On appelle mouvement virtuel, tout mouvement décrit par un champ de vitesse $V^*(x, y, z)$ imaginable. Ce mouvement peut ou non respecter les liaisons, déformer le système ou non. Si le mouvement ne déforme pas le système, on l'appelle mouvement rigidifiant.

Axiome des puissances virtuelles :

Dans tout mouvement virtuel rigidifiant, la puissance virtuelle des efforts intérieurs est nulle.

3 Utilisation du PPV^*

3.1 Calcul des puissances virtuelles :

Les puissances virtuelles sont calculées avec les efforts réels et les vitesses virtuelles. Tout ce qui est virtuel sera noté avec une *

La puissance virtuelle d'un effort \vec{F} , appliqué en un point A animé d'une vitesse virtuelle \vec{V}_A^* est $P_F^* = \vec{F} \bullet \vec{V}_A^*$

La puissance virtuelle d'un moment \vec{M}_A appliqué sur un solide en rotation virtuelle $\vec{\Omega}^*$ est $P_M^* = \vec{M}_A \bullet \vec{\Omega}^*$

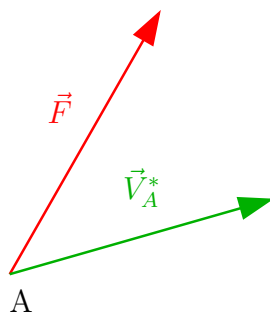


FIGURE 2: Calcul de la puissance virtuelle d'une force

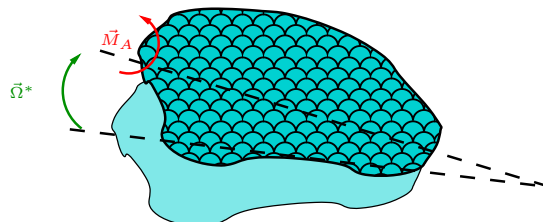


FIGURE 3: Calcul de la puissance virtuelle d'un moment

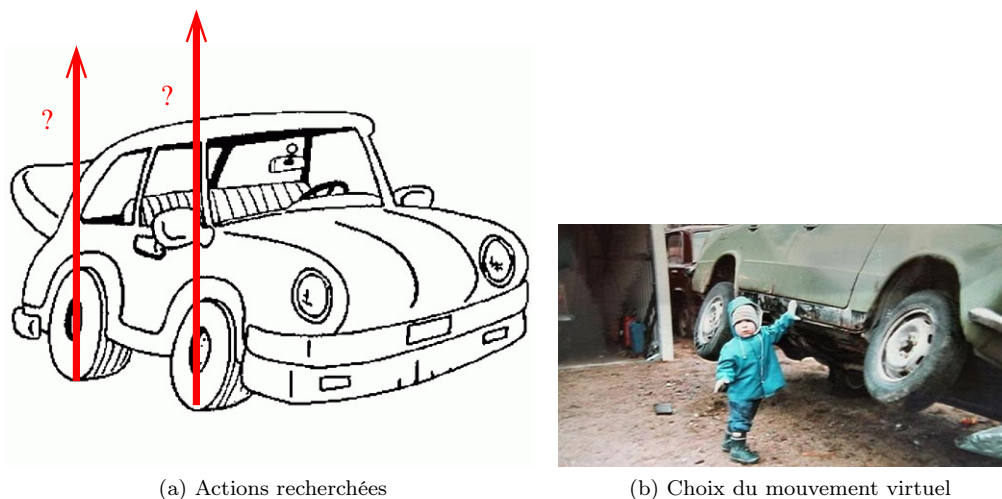
3.2 Comment utiliser le PPV* ?

Pour un système isolé, si on cherche une action en particulier, on choisit un mouvement virtuel qui :

- Fait travailler l'action recherchée
- Fait travailler un minimum d'autres actions.

Pour faire travailler un minimum d'action, on choisit souvent des mouvements rigidifiants ou éventuellement rigidifiant par morceau si l'action recherchée est une action intérieure.

Prenons l'exemple d'un véhicule à l'arrêt illustré sur la figure 4a, le véhicule est en équilibre sous l'action du poids propre et des actions du sol sur les roues. Si on cherche les actions du sol sur les roues droites, on imagine un mouvement rigidifiant faisant travailler les actions considérées, par exemple le mouvement illustré sur la figure 4b.



(a) Actions recherchées

(b) Choix du mouvement virtuel

FIGURE 4: Exemple de choix de mouvement virtuel

Le mouvement virtuel choisi fait travailler les actions recherchées, le poids du véhicule, mais ne fait pas travailler les actions du sol sur les roues gauches.

3.3 Exemple de calcul d'actions extérieures :

On se pose le problème d'une poutre sur deux appuis sollicitée par une charge concentrée illustré sur le figure 5a. Les actions exercées sur la poutre sont représentées sur la figure 5b, les inconnues sont en bleu.

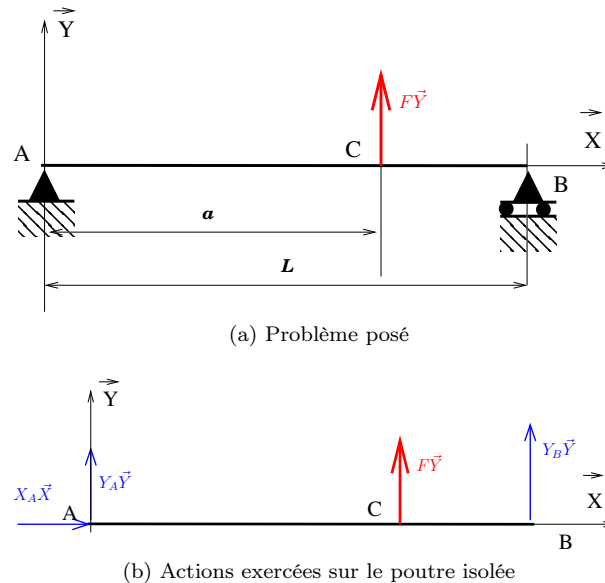


FIGURE 5: Poutre sur 2 appuis

3.3.1 Calcul de Y_B

Si on souhaite calculer dans un premier temps Y_B , on choisit un champ de vitesse qui met en mouvement B dans la direction \vec{Y} afin de faire travailler Y_B . Pour éviter de faire entrer d'autres inconnues dans l'équation, on choisit un champ de vitesse rigidifiant et on choisit de ne pas déplacer le point A . Ce champ correspond à une rotation virtuelle autour du point A paramétrée par la rotation virtuelle ω^* (Figure 6).

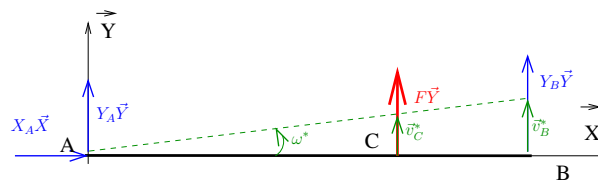


FIGURE 6: Champ de vitesses virtuelles pour calcul de Y_B

Application du PPV^* pour le mouvement virtuel choisi :

$$P_{int}^* + P_{ext}^* = P_{acc}^*, \quad \forall \omega^*$$

Le mouvement est rigidifiant, nous avons donc $P_{int}^* = 0$, nous nous plaçons dans le cas d'un équilibre statique donc $P_{acc}^* = 0$.

Il reste donc

$$P_{ext}^* = 0, \quad \forall \omega^*$$

soit :

$$F\vec{Y} \bullet \vec{v}_C^* + Y_B\vec{Y} \bullet \vec{v}_B^*, \quad \forall \omega^*$$

Avec $\vec{v}_C^* = \omega^* \vec{Z} \wedge a\vec{x} = a\omega^* \vec{Y}$ et $\vec{v}_B^* = \omega^* \vec{Z} \wedge L\vec{x} = L\omega^* \vec{Y}$

Attention : La vitesse virtuelle est obtenue facilement en multipliant algébriquement la vitesse de rotation virtuelle ω^* par le "bras de levier", mais dans ce cas, il faut faire attention au signe de la rotation virtuelle et de la vitesse virtuelle qui doivent être compatibles.

On obtient donc :

$$F a \omega^* + Y_B L \omega^* = 0, \quad \forall \omega^*$$

Soit :

$$F a + Y_B L = 0$$

$$\boxed{Y_B = -\frac{F a}{L}}$$

Remarque : Cette équation est équivalente à l'équation d'équilibre en moment au point A .

3.3.2 Calcul de Y_A

Si on souhaite maintenant calculer Y_A , on choisit le mouvement virtuel illustré sur la figure 7 :

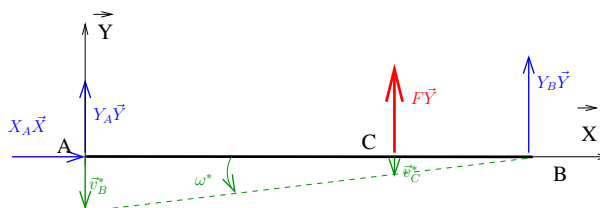


FIGURE 7: Champ de vitesses virtuelles pour calcul de Y_B

Ici la vitesse de rotation virtuelle ω^* est positive (je vous conseille de dessiner systématiquement les mouvements virtuels choisis et lorsqu'ils incluent des rotations, de les prendre positives) et les vitesses virtuelles ont des projections négatives (voir la remarque ci dessus 3.3.1).

On peut écrire $v_B^* = -L\omega^*$ et $v_C^* = -(L-a)\omega^*$

Le PPV* donne

$$-L\omega^* Y_A - (L-a)\omega^* F = 0, \quad \forall \omega^*$$

soit

$$\boxed{Y_A = -F \frac{L-a}{L}}$$

Remarque : Cette équation est équivalente à l'équation d'équilibre en moment au point B .

3.3.3 Calcul de X_A

Pour calculer X_A , on utilise une vitesse virtuelle horizontale (voir figure 8)

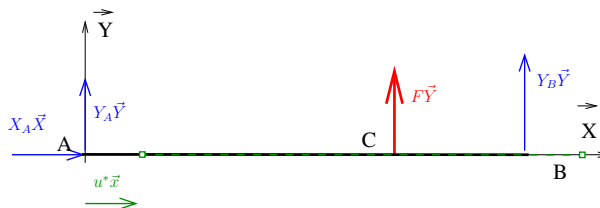


FIGURE 8: Champ de vitesses virtuelles pour calcul de X_A

Le PPV^* donne

$$X_A u^* = 0, \quad \forall u^*$$

soit

$$\boxed{X_A = 0}$$

Remarque : Cette équation est équivalente à l'équation de la résultante en projection sur l'axe \vec{X} .

3.3.4 Autres possibilités :

- Si on veut obtenir l'équivalent de l'équation de la résultante en projection sur l'axe \vec{y} , il suffit d'imposer un mouvement virtuel vertical.
- On peut obtenir l'ensemble des actions de liaisons avec un seul mouvement virtuel qui combine les possibilités (Figure yyy)

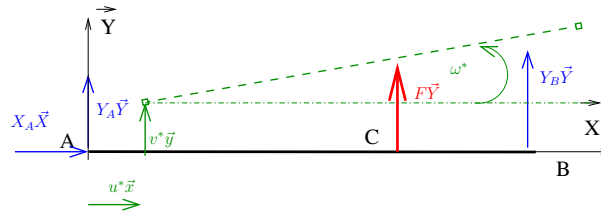


FIGURE 9: Champ de vitesses virtuelles pour calculer toutes les actions

Le PPV^* donne

$$X_A u^* + Y_A v^* + F(v^* + a\omega^*) + Y_B(v^* + L\omega^*) = 0, \quad \forall u^*, v^*, \omega^*$$

soit

$$u^* \neq 0, v^* = 0, \omega^* = 0 \implies \boxed{X_A = 0}$$

$$u^* = 0, v^* + L\omega^* = 0 \implies \boxed{Y_A = -F \frac{L-a}{L}}$$

$$u^* = 0, v^* = 0, \omega^* \neq 0 \implies \boxed{Y_B = -\frac{Fa}{L}}$$

Deuxième partie

Méthode des déplacements :

4 Introduction :

La méthode des déplacements est une méthode systématique qui permet de résoudre des problèmes isostatiques ou hyperstatiques.

La structure est discrétisée en éléments dont on a préalablement étudié le comportement (généralement on prend des poutres droites), les éléments sont liés entre eux par des nœuds dont on cherche les déplacements et rotations.

Une fois les déplacements des nœuds obtenus, on peut, en utiliser le comportement des éléments pour calculer les efforts aux nœuds et les sollicitations.

La méthode des déplacements est d'autant plus efficace que le problème est fortement contraint donc hyperstatique.

5 Notations :

5.1 Repère local :

Le repère local orthonormé pour la barre $[IJ]$ ($I < J$) est défini par $\vec{x}_{ij} = \frac{\vec{IJ}}{\|\vec{IJ}\|}$ (Voir figure 10). L'ordre de la numérotation donne l'orientation de la barre.

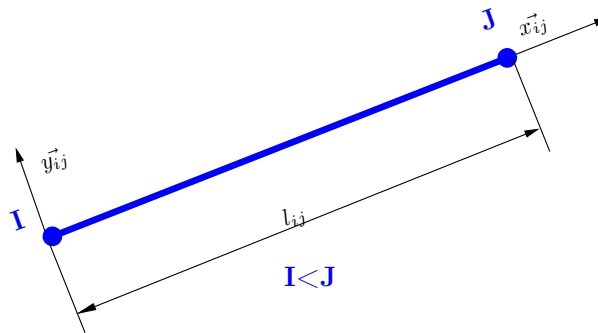


FIGURE 10: Repère local

5.2 Actions des nœuds sur la barre :

Les actions des nœuds I et J sur la barre $[IJ]$ sont notés de la manière suivante dans le repère local de la barre (Figure 11) :

$$\vec{F}_{(I/[IJ])} = N_{ij}\vec{x}_{ij} + V_{ij}\vec{y}_{ij} \quad \vec{M}_{(I/[IJ])} = M_{ij}\vec{z}$$

$$\vec{F}_{(J/[IJ])} = N_{ji}\vec{x}_{ij} + V_{ji}\vec{y}_{ij} \quad \vec{M}_{(J/[IJ])} = M_{ji}\vec{z}$$

On peut déduire les sollicitations aux extrémités qui sont données par les actions de Ω^+ sur Ω^- .

Les actions du nœud J sur la barre $[IJ]$ sont les actions de Ω^+/Ω^- et sont donc confondues avec les sollicitations

Les actions du nœud I sur la barre $[IJ]$ sont les actions de Ω^-/Ω^+ et sont donc opposées aux sollicitations

$$\begin{cases} N(J) &= N_{ji} \\ V_y(J) &= V_{ji} \\ M_{fz}(J) &= M_{ji} \end{cases} \quad \begin{cases} N(I) &= -N_{ij} \\ V_y(I) &= -V_{ij} \\ M_{fz}(I) &= -M_{ij} \end{cases}$$

5.3 Déplacements des nœuds :

Les déplacements sont également repérés dans le repère local (Figure 12).

Attention à ne pas confondre le déplacement dans la direction de \vec{y}_{ij} noté v et l'effort dans la direction de \vec{y}_{ij} noté V .

$$\begin{aligned} \vec{U}(I) &= u_{ij}\vec{x}_{ij} + v_{ij}\vec{y}_{ij} & \vec{\Omega}(I) &= \omega_{ij}\vec{z} = \omega_i\vec{z} \\ \vec{U}(J) &= u_{ji}\vec{x}_{ij} + v_{ji}\vec{y}_{ij} & \vec{\Omega}(J) &= \omega_{ji}\vec{z} = \omega_j\vec{z} \end{aligned}$$

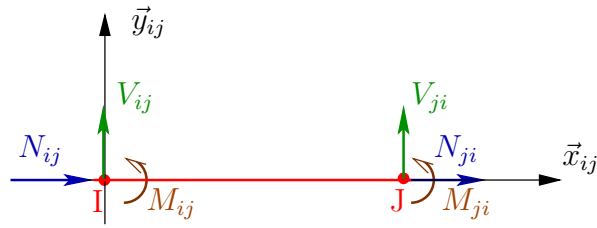


FIGURE 11: Efforts des nœuds sur les barres

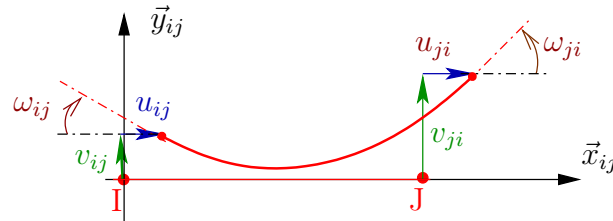


FIGURE 12: Déplacements des nœuds

6 Comportement d'une barre [IJ], $i < j$:

Le comportement d'une barre est la relation entre les variables statiques N_{ij} , V_{ij} , M_{ij} , N_{ji} , V_{ji} , M_{ji} et les variables cinématiques u_{ij} , v_{ij} , ω_{ij} , u_{ji} , v_{ji} , ω_{ji}

On établit habituellement les relations entre les variables cinématiques et statiques puis on les inverse.

6.1 Cas d'une barre non chargée :

Les équations suivantes sont établies en TD (TD2 et TD3). Elles sont établies pour différents cas de chargement en déplacement/rotation aux extrémités.

6.1.1 Cas de l'allongement raccourcissement :

On considère une poutre [IJ] à laquelle on impose des déplacements axiaux u_{ij} et u_{ji} (Figure 13a). On peut obtenir le résultat souhaité en appliquant le chargement illustré sur la figure 13b.

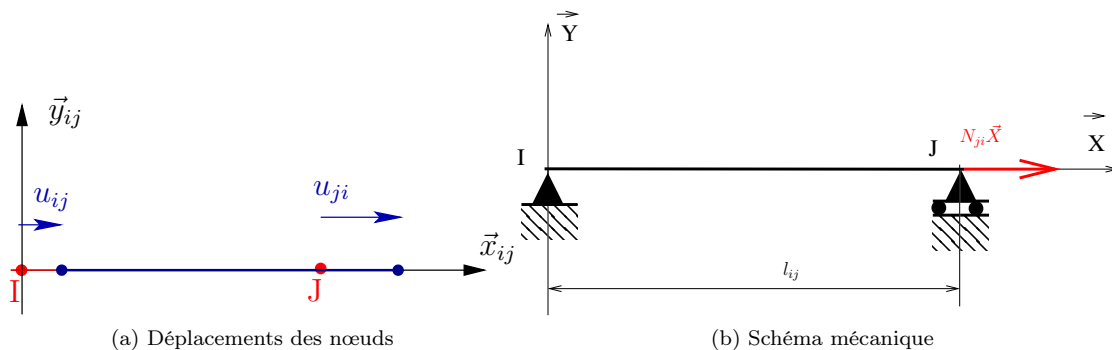


FIGURE 13: cas de l'allongement

Les actions de liaison sont obtenues facilement par exemple en imposant un déplacement virtuel horizontal puis vertical.

$$N_{ij} = -N_{ji}, V_{ij} = V_{ji} = 0$$

$$\text{Les sollicitations sont : } N(x) = N_{ji}, V_y(x) = 0, M_{fz}(x) = 0$$

L'équation de la déformée est $\varepsilon(x) = \frac{dU_x}{dx} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N(x)}{EA}$ où A est l'aire de la section de la poutre et E , le module d'élasticité longitudinal du matériau.

Nous avons donc

$$\frac{dU_x}{dx} = \frac{N_{ji}}{EA} = Cste$$

en intégrant on trouve :

$$U_x(x) = \frac{N_{ji}}{EA}x + C_1$$

or $U_x(0) = u_{ij} \Rightarrow C_1 = u_{ij}$

Pour $x = l_{ij}$, on trouve :

$$U_x(l_{ij}) = u_{ji} = \frac{N_{ji}}{EA}l_{ij} + u_{ij}$$

Soit :

$$\begin{cases} N_{ji} = \frac{EA}{l_{ij}}(u_{ji} - u_{ij}) \\ N_{ij} = \frac{EA}{l_{ij}}(u_{ij} - u_{ji}) \end{cases}$$

6.1.2 Cas de rotations :

On considère une poutre [IJ] à laquelle on impose les moments M_{ij} et M_{ji} (figure 14)

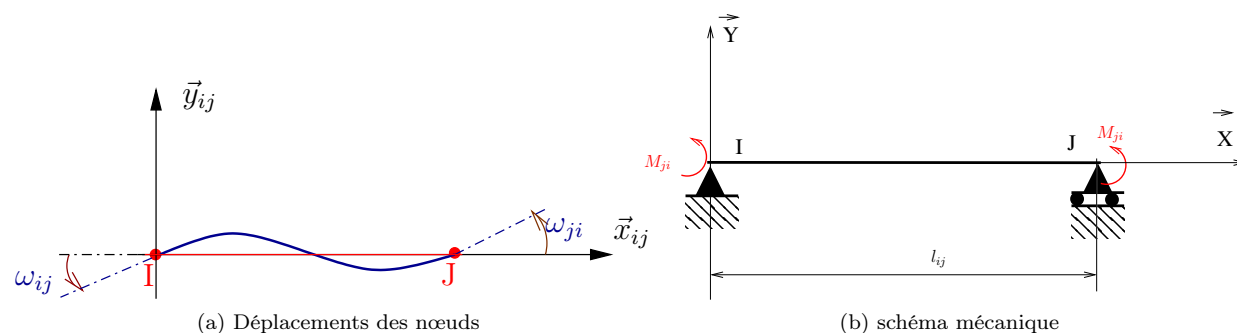


FIGURE 14: cas de rotations

Les actions de liaison sont obtenues facilement par exemple en imposant un déplacement virtuel représenté sur la figure 15, puis un mouvement d'ensemble vertical, puis horizontal.

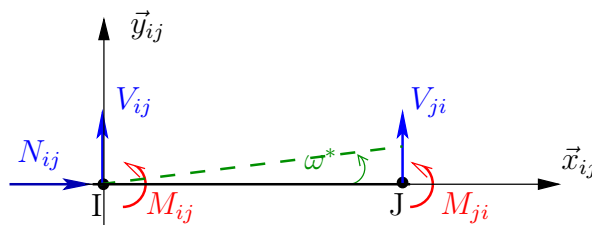


FIGURE 15: Mouvement virtuel

On obtient $M_{ij}\omega^* + M_{ji}\omega^* + V_{ji}l_{ij}\omega^* = 0, \quad \forall \omega^*$

Soit

$$\begin{cases} V_{ji} = -\frac{M_{ij} + M_{ji}}{l_{ij}} \\ V_{ij} = \frac{M_{ij} + M_{ji}}{l_{ij}} \\ N_{ij} = 0 \end{cases}$$

Le diagramme des moments fléchissants est obtenu avec $M_{fz}(I) = -M_{ij}$ et $M_{fz}(J) = M_{ji}$:

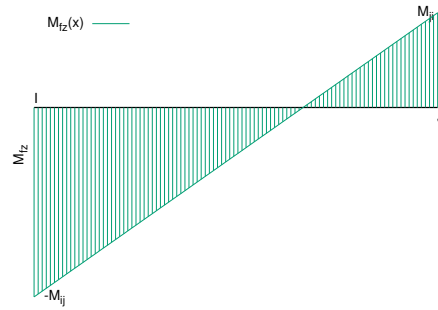


FIGURE 16: Diagramme du moment fléchissant

La rotation ω_{ij} du nœud I peut être obtenue par le théorème de Ménabréa : $\omega_{ij} = \int_I^J \frac{M_{fz}(x)\overline{M}_1(x)}{EI_{Gz}} dx$ où $\overline{M}_1(x)$ est le moment fléchissant dû à l'application d'un moment unitaire au point I .

De la même manière, La rotation ω_{ji} du nœud J est donnée par $\omega_{ji} = \int_I^J \frac{M_{fz}(x)\overline{M}_2(x)}{EI_{Gz}} dx$ où $\overline{M}_2(x)$ est le moment fléchissant dû à l'application d'un moment unitaire au point J .

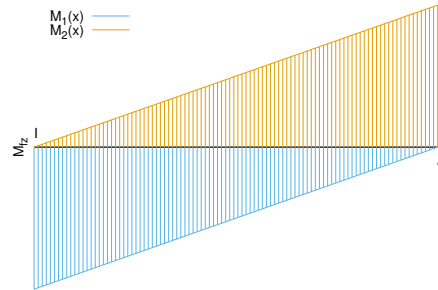


FIGURE 17: Moments fléchissants unitaires

On obtient donc

$$\omega_{ij} = \frac{1}{EI_{Gz}} \left(M_{ij} \frac{l_{ij}}{3} - M_{ji} \frac{l_{ij}}{6} \right) \quad (1)$$

$$\omega_{ji} = \frac{1}{EI_{Gz}} \left(-M_{ij} \frac{l_{ij}}{6} + M_{ji} \frac{l_{ij}}{3} \right) \quad (2)$$

Il faut maintenant inverser le système :

$$2 * (1) + (2) \rightarrow 2\omega_{ij} + \omega_{ji} = \frac{M_{ij}}{EI_{Gz}} \left(\frac{2l_{ij}}{3} - \frac{l_{ij}}{6} \right)$$

et

$$(1) + 2 * (2) \rightarrow \omega_{ij} + 2\omega_{ji} = \frac{M_{ji}}{EI_{Gz}} \left(-\frac{l_{ij}}{6} + \frac{2l_{ij}}{3} \right)$$

soit :

$$M_{ij} = \frac{4EI}{l_{ij}} \omega_{ij} + \frac{2EI}{l_{ij}} \omega_{ji}$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{l_{ij}} \omega_{ij} + \frac{4EI}{l_{ij}} \omega_{ji}$$

en utilisant les équations des efforts V_{ij} et V_{ji} , on obtient :

$$V_{ij} = \frac{6EI}{l_{ij}^2} (\omega_{ij} + \omega_{ji})$$

$$V_{ji} = -\frac{6EI}{l_{ij}^2} (\omega_{ij} + \omega_{ji})$$

6.1.3 Cas des déplacements :

On considère une poutre [IJ] à laquelle on impose les déplacements v_{ij} et v_{ji} (figure 18)

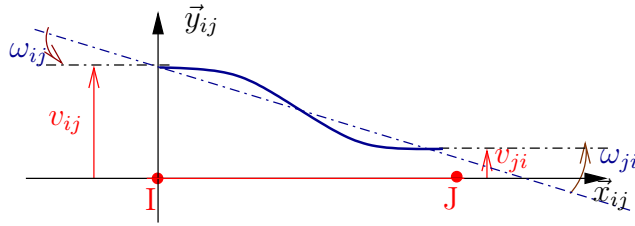


FIGURE 18: cas des déplacements v_{ij}

La déformée de la poutre est la même que pour le cas précédent avec $\omega_{ij} = \omega_{ji} = \frac{v_{ij} - v_{ji}}{l_{ij}}$, on obtient donc directement :

$$M_{ij} = \frac{6EI}{l_{ij}^2} (v_{ij} - v_{ji})$$

$$M_{ji} = \frac{6EI}{l_{ij}^2} (v_{ij} - v_{ji})$$

$$V_{ij} = \frac{12EI}{l_{ij}^3} (v_{ij} - v_{ji})$$

$$V_{ji} = -\frac{12EI}{l_{ij}^3} (v_{ij} - v_{ji})$$

6.1.4 Cas général :

On superpose l'ensemble des déplacements possibles et on obtient :

$$N_{ij} = \frac{EA}{l_{ij}} (u_{ij} - u_{ji})$$

$$N_{ji} = \frac{EA}{l_{ij}} (-u_{ij} + u_{ji})$$

$$M_{ij} = \frac{4EI}{l_{ij}} \omega_{ij} + \frac{2EI}{l_{ij}} \omega_{ji} + \frac{6EI}{l_{ij}^2} (v_{ij} - v_{ji})$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{l_{ij}} \omega_{ij} + \frac{4EI}{l_{ij}} \omega_{ji} + \frac{6EI}{l_{ij}^2} (v_{ij} - v_{ji})$$

$$V_{ij} = \frac{6EI}{l_{ij}^2} (\omega_{ij} + \omega_{ji}) + \frac{12EI}{l_{ij}^3} (v_{ij} - v_{ji})$$

$$V_{ji} = -\frac{6EI}{l_{ij}^2} (\omega_{ij} + \omega_{ji}) - \frac{12EI}{l_{ij}^3} (v_{ij} - v_{ji})$$

6.2 Cas d'une barre chargée

Lors qu'une barre est chargée en travée, son chargement total est la superposition de deux états.

1. La barre est chargée par imposition des déplacements et rotations aux nœuds I et J sans son chargement en travée.
2. La barre a ses extrémités bloquées en déplacements et rotations et reçoit son chargement en travée.

La résolution du second cas par une méthode appropriée permet de calculer les actions d'encastrement aux nœud I et J qui sont notées $N_{ij}^0, N_{ji}^0, M_{ij}^0, M_{ji}^0, V_{ij}^0, V_{ji}^0$

On obtient donc par superposition pour une poutre de longueur l_{ij} , de module d'élasticité E et d'inertie de flexion I :

$$\begin{aligned}
 N_{ij} &= \frac{EA}{l_{ij}}(u_{ij} - u_{ji}) + N_{ij}^0 \\
 N_{ji} &= \frac{EA}{l_{ij}}(-u_{ij} + u_{ji}) + N_{ji}^0 \\
 M_{ij} &= \frac{4EI}{l_{ij}}\omega_{ij} + \frac{2EI}{l_{ij}}\omega_{ji} + \frac{6EI}{l_{ij}^2}(v_{ij} - v_{ji}) + M_{ij}^0 \\
 M_{ji} &= \frac{2EI}{l_{ij}}\omega_{ij} + \frac{4EI}{l_{ij}}\omega_{ji} + \frac{6EI}{l_{ij}^2}(v_{ij} - v_{ji}) + M_{ji}^0 \\
 V_{ij} &= \frac{6EI}{l_{ij}^2}(\omega_{ij} + \omega_{ji}) + \frac{12EI}{l_{ij}^3}(v_{ij} - v_{ji}) + V_{ij}^0 \\
 V_{ji} &= -\frac{6EI}{l_{ij}^2}(\omega_{ij} + \omega_{ji}) - \frac{12EI}{l_{ij}^3}(v_{ij} - v_{ji}) + V_{ji}^0
 \end{aligned}$$

— pour une charge répartie $f y_{ij}^{\vec{}}$ appliquée sur la travée :

$$M_{ij}^0 = -\frac{fl_{ij}^2}{12}, M_{ji}^0 = \frac{fl_{ij}^2}{12}, V_{ij}^0 = V_{ji}^0 = -\frac{fl_{ij}}{2}$$

— pour une charge concentrée $F y_{ij}^{\vec{}}$ appliquée en milieu de travée :

$$M_{ij}^0 = -\frac{Fl_{ij}}{8}, M_{ji}^0 = \frac{Fl_{ij}}{8}, V_{ij}^0 = V_{ji}^0 = -\frac{F}{2}$$

7 Hypothèse des longueurs de barres invariantes (méthode des déplacements simplifiée).

Dans le cas de la méthode des forces, il est courant de négliger l'énergie élastique due à l'effort tranchant par rapport à celle due au moment fléchissant, c'est le cas pour les structures à énergie de flexion dominante.

Pour ce type de structure, dans le cas de l'utilisation de la méthode des déplacements cela se traduit par l'hypothèse appelée des longueurs de barre invariantes.

L'application de l'hypothèse des longueurs de barres invariantes (lbi) pour la barre $[IJ]$ se traduit par l'équation :

$$u_{ij} = u_{ji}$$

L'utilisation de cette hypothèse est équivalente à supposer que la barre est infiniment raide pour une sollicitation due à l'effort normal, il y a donc existence d'un effort normal non nécessairement nul qui ne s'accompagne pas de déformation d'allongement ou raccourcissement. Cette raideur infinie revient à considérer le ration $\frac{EA}{l_{ij}} \rightarrow \infty$, les équations donnant les valeurs des N_{ij} et N_{ji} ne sont donc pas utilisables.

8 Cas particulier des bâtiments de type poutre - poteau

Dans le cas où la structure étudiée est un bâtiment de type poutre-poteau (Figure 19), on peut faire l'hypothèse que les rigidités de flexion des horizontaux (poutres + planchers) sont très grandes devant celles des verticaux (poteaux).

Si on effectue une simulation aux éléments finis d'un bâtiment typique du style poutre poteau (Figures 20a et 20b), on se rend compte que les planchers ne fléchissent que très peu (ici, on a calculé la déformée du premier mode propre de vibration, ce sera celle qui sera prépondérante lors des calculs sismiques), ce qui impose que les nœuds correspondant aux jonctions poutre-poteau ont des rotations nulles.



FIGURE 19: Bâtiment de type poutre poteau

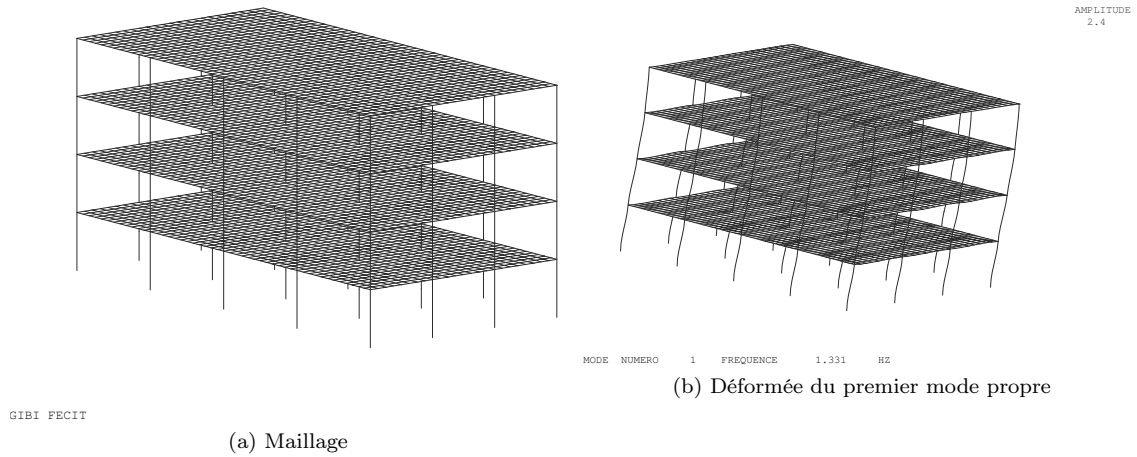


FIGURE 20: Simulation aux éléments finis d'un bâtiment type

Si on ajoute à l'hypothèse que les planchers sont infiniment rigides devant les poteaux à celle des longueurs de barre invariables, les inconnues d'un problème de bâtiment se résument aux déplacements horizontaux de chaque niveau soit uniquement 4 degrés de liberté pour le cas d'un bâtiment de 4 niveaux sollicité dans un plan ou 8 degrés de liberté pour le cas 3D général.

L'utilisation de cette hypothèse conduit à considérer des raideurs infinies sur les barres qui composent les planchers donc à l'impossibilité d'utiliser les relations de comportement sur ces barres.

9 Étapes de résolution (méthode des déplacements simplifiée) :

1. Discrétisation :

On positionne des nœuds de façon à découper la structure en éléments de poutres droites. *La numérotation oriente le sens de parcours des poutres du plus petit numéro de nœud vers le plus grand. On peut positionner des nœuds aux points d'applications des charges concentrées ou utiliser les M_{ij}^0 et V_{ij}^0 .*

2. Dénombrement des inconnues :

Les inconnues sont les déplacements et rotations des nœuds qui ne sont pas contraints soit par des liaisons soit par l'hypothèse des longueurs de barres invariantes. Dans le cas des bâtiments poutre-poteau on utilise également la rotation nulle des planchers. *Les inconnues dépendent de la géométrie et des liaisons mais pas du chargement extérieur.*

3. Équations d'équilibre :

On applique le *PPV** autant de fois qu'il y a de degrés de liberté. Pour chaque degré de liberté, on choisit un champ de déplacement virtuel qui mobilise de degré de liberté considéré, qui respecte les liaisons et qui rend les poutres rigides. Les liaisons entre poutres et nœuds peuvent être rompues (généralement en rotation).

$$P_{ext}^* + P_{int}^* = 0$$

4. Comportement :

On remplace les M_{ij} et V_{ij} intervenant dans les équations par les degrés de liberté identifiées en 2. *On peut utiliser ici des conditions complémentaires découlant des symétries.*

5. Résolution :

Résoudre le système

6. Calcul des efforts aux nœuds :

On utilise les déplacements et rotations précédemment calculés que l'on injecte dans les relations de comportement pour déterminer les efforts aux nœuds désirés.

7. Tracé des diagrammes :

Dans le cas de charges réparties, il est souvent nécessaire de tracer le diagramme de V_y en premier.

$$V_y(I) = -V_{ij}, V_y(J) = V_{ji}, M_{fz}(I) = -M_{ij}, M_{fz}(J) = M_{ji}.$$

Pour calculer les efforts normaux, il faut utiliser l'équilibre des nœuds.

Troisième partie

Exemples :

10 Portique bi-encastré

On se propose de résoudre le problème suivant par la méthode des déplacements en utilisant l'hypothèse des longueurs de barres invariantes :

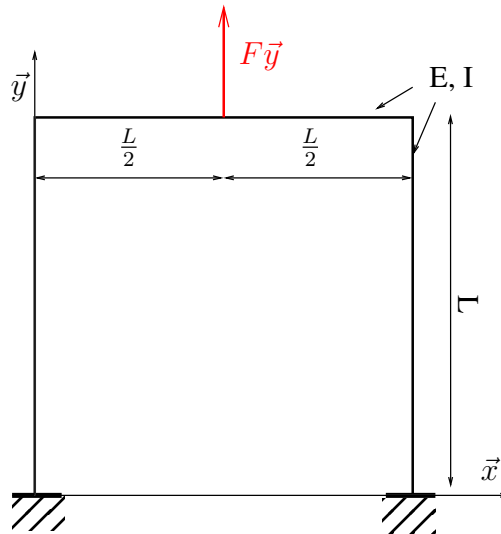


FIGURE 21: Portique bi-encastré

10.1 Discrétisation

Le problème est symétrique, on peut donc en modéliser la moitié. La déformée du problème doit respecter la symétrie, les points qui appartiennent à l'axe de symétrie sont donc assujettis à avoir un déplacement dans l'axe de symétrie et pas de rotation, ce qui se traduit par un blocage du déplacement horizontal et de la rotation du point d'application de l'effort dont l'intensité doit être divisée par 2. On peut donc adopter une discrétisation en deux éléments et 3 nœuds.

10.2 Dénombrement des inconnues

Il est plus pratique de dénombrer dans un premier temps les inconnues (déplacements et rotations des nœuds) dans le repère global.

Nous avons 3 nœuds donc 9 inconnues : $U_{x1}, U_{y1}, \omega_1, U_{x2}, U_{y2}, \omega_2, U_{x3}, U_{y3}, \omega_3$

On prend en compte dans un premier temps des liaisons :

— Encastrement en 1 : $U_{x1} = 0, U_{y1} = 0, \omega_1 = 0$

— Liaison glissière en 3 : $U_{x3} = 0, \omega_3 = 0$

Dans un second temps, on prend en compte les longueurs de barres invariantes, pour ceci, il faut se référer aux repères locaux de chaque barre (Figure 22b)

— pour la barre [12] , $u_{21} = u_{12} \Leftrightarrow U_{y2} = U_{y1}$ on a donc $U_{y2} = 0$

— pour la barre [23] , $u_{32} = u_{23} \Leftrightarrow U_{x3} = U_{x2}$ on a donc $U_{x2} = 0$

Il reste donc :

$$\omega_2 \text{ et } U_{y3} = v_{32}$$

10.3 Équations d'équilibre

Pour chaque degré de liberté, on choisit un champ de déplacement virtuel qui mobilise de degré de liberté considéré, qui respecte les liaisons et qui rend les poutres rigides. Les liaisons entre poutres et nœuds peuvent être rompues

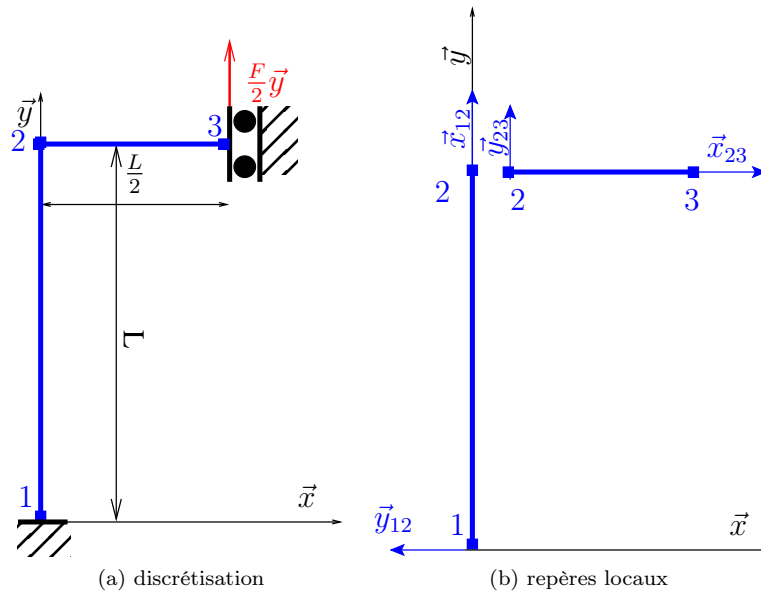
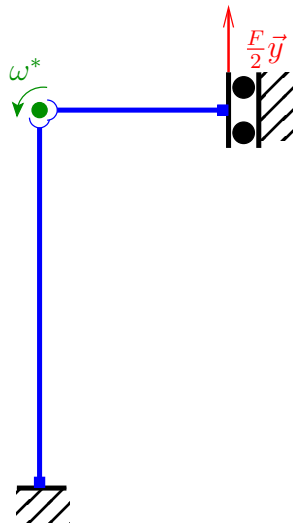


FIGURE 22: Modélisation du portique bi-encastré et discrétisation

(généralement en rotation).

Pour ω_2 le mouvement virtuel doit mettre en rotation le nœud 2, respecter les liaisons et peut rompre les liaisons nœud/barre en rotation.

FIGURE 23: Mouvement virtuel pour ω_2

Si on écrit l'équilibre de l'ensemble : La puissance virtuelle des efforts extérieurs est nulle, pour évaluer la puissance virtuelle des efforts intérieurs, il faut calculer la puissance des actions qui s'exercent sur le nœud 2 dans le mouvement du nœud 2 :

$$P_{int}^* = -M_{21}\omega^* - M_{23}\omega^* = 0$$

soit

$$\boxed{M_{21} + M_{23} = 0} \quad (3)$$

Pour U_{y3} Le mouvement virtuel déplace le nœud 3 verticalement de v^* *sans le tourner*, pour ceci, le nœud amène la barre en rotation ω^* avec $v^* = \frac{L}{2}\omega^*$, les liaisons en rotation entre les nœuds 2 et 3 et la barre [23] sont rompues.

Si on avait choisi un mouvement virtuel qui entraîne la rotation du noeud 3, il aurait fallu intégrer la puissance virtuelle du moment de la liaison glissière en 3 dans le bilan des puissances virtuelles des actions extérieures.

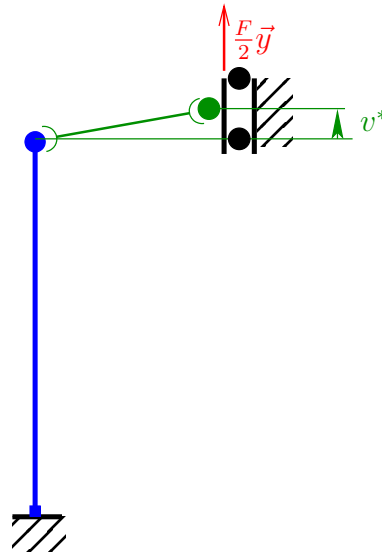


FIGURE 24: Mouvement virtuel pour U_{y3}

Ici, c'est la barre qui tourne, ce sont donc les moments des nœuds sur la barre qui travaillent. On a donc $P_{ext}^* = \frac{F}{2} v^*$ et $P_{int}^* = M_{21}\omega^* + M_{32}\omega^*$

le PPV^* donne donc : $M_{23}\omega^* + M_{32}\omega^* + \frac{F}{2} \frac{L}{2}\omega^* = 0$, $\forall \omega^*$ soit

$$\boxed{4(M_{23} + M_{32}) + FL = 0} \quad (4)$$

10.4 Comportement :

On se retrouve avec 2 équations et trois inconnues (M_{21} , M_{23} et M_{32}) on ne peut donc pas résoudre à cette étape, par contre on peut exprimer les moments en fonction des degrés de liberté (ω_2 et U_{y3}) en utilisant les relations de comportement établies pour une poutre droite. On aura ainsi 2 équations à 2 inconnues, et on pourra résoudre.

Pour M_{21} , on utilise l'équation M_{ji}

$$M_{21} = \frac{2EI}{l_{12}}\omega_{12} + \frac{4EI}{l_{12}}\omega_{21} + \frac{6EI}{l_{12}^2}(v_{12} - v_{21}) \text{ soit :}$$

$$M_{21} = \frac{4EI}{L}\omega_2$$

Pour M_{23} , on utilise l'équation M_{ij} avec $\omega_{23} = \omega_2$, $\omega_{32} = 0$, $v_{23} = 0$, $v_{32} = U_{y3}$ et $l_{23} = \frac{L}{2}$

$$M_{23} = \frac{4EI}{L/2}\omega_2 + \frac{6EI}{(L/2)^2}(-U_{y3}) = \frac{8EI}{L}\omega_2 - \frac{24EI}{L^2}U_{y3}$$

Idem pour M_{32} avec l'équation M_{ji} :

$$M_{32} = \frac{4EI}{L}\omega_2 - \frac{24EI}{L^2}U_{y3}$$

10.5 Résolution :

l'équation 3 devient : $\frac{4EI}{L}\omega_2 + \frac{8EI}{L}\omega_2 - \frac{24EI}{L^2}U_{y3} = 0$ soit

$$L\omega_2 - 2U_{y3} = 0 \quad (5)$$

et l'équation 4 devient : $4\left(\frac{12EI}{L}\omega_2 - \frac{48EI}{L^2}U_{y3}\right) + FL = 0$ soit

$$L\omega_2 - 4U_{y3} = -\frac{FL^3}{48EI} \quad (6)$$

$$(5) - (6) \rightarrow \boxed{U_{y3} = \frac{FL^3}{96EI}}$$

$$2 * (5) - (6) \rightarrow \boxed{\omega_2 = \frac{FL^2}{48EI}}$$

10.6 Calcul des efforts aux nœuds :

On utilise les déplacements et rotation inconnues qu'on injecte dans les relations de comportement pour déterminer les efforts aux nœuds désirés.

$$M_{12} = \frac{4EI}{l_{12}}\omega_{12} + \frac{2EI}{l_{12}}\omega_{21} + \frac{6EI}{l_{12}^2}(v_{12} - v_{21}) = \frac{2EI}{L}\omega_2 = \frac{FL}{24}$$

$$M_{21} = \frac{4EI}{L}\omega_2 = \frac{FL}{12}$$

$$M_{23} = -M_{21} = -\frac{FL}{12}$$

$$M_{32} = \frac{4EI}{L}\omega_2 - \frac{24EI}{L^2}U_{y3} = -\frac{FL}{6}$$

$$V_{12} = \frac{6EI}{L^2}(\omega_{12} + \omega_{21}) + \frac{12EI}{L^3}(v_{12} - v_{21}) = \frac{6EI}{L^2}\omega_2 = \frac{F}{8}$$

$$V_{21} = -\frac{F}{8}$$

$$V_{23} = -\frac{F}{2}$$

$$V_{32} = \frac{F}{2}$$

On ne peut pas calculer les N_{ij} et N_{ji} à partir des équations car on a utilisé l'hypothèse des longueurs de barres invariantes, pour effectuer les calculs, il suffit d'écrire l'équilibre du nœud 2 :

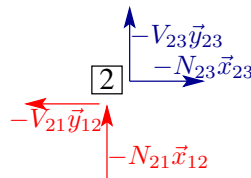


FIGURE 25: Équilibre du nœud 2

Pour un mouvement u^* horizontal du nœud 2 $N_{23}u^* - (-V_{21})u^* = 0$, $\forall u^*$ soit $N_{23} = -\frac{F}{8}$

Pour un mouvement v^* vertical du nœud 2 $-N_{21}v^* - V_{23}v^* = 0$, $\forall v^*$ soit $N_{21} = \frac{F}{2}$

10.7 Tracé des diagrammes

On utilise les valeurs des efforts aux nœuds ainsi que les équations différentielles d'équilibre : $\frac{dN(x)}{dx} = -f_x$, $\frac{dV_y(x)}{dx} = -f_y$, $\frac{dM_{fz}(x)}{dx} = -V_y$ où f_x et f_y sont respectivement les projections de la charge répartie dans les axes locaux x_{ij} , y_{ij} .

Effort normal N : dans la barre [12], $N(2) = N_{21} = \frac{F}{2}$, N est constant sur la barre
 dans la barre [23], $N(2) = -N_{23} = \frac{F}{8}$, N est constant sur la barre
 On peut compléter le diagramme par symétrie.

Effort tranchant V_y : dans la barre [12], $V_y(2) = V_{21} = -\frac{F}{8}$, V_y est constant sur la barre
 dans la barre [23], $V_y(2) = V_{32} = \frac{F}{2}$, V_y est constant sur la barre
 On peut compléter le diagramme par symétrie (antisymétrie dans le cas de l'effort tranchant).

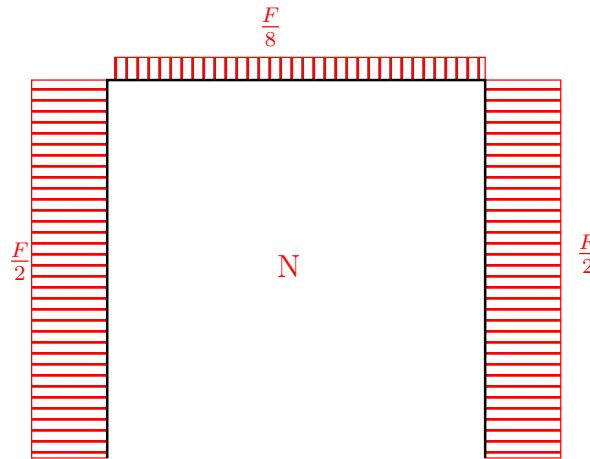


FIGURE 26: Diagramme de l'effort normal

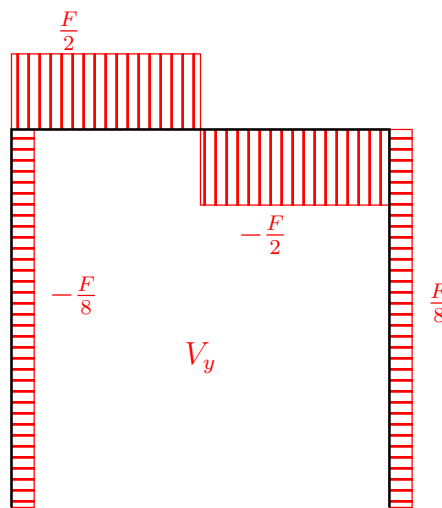


FIGURE 27: Diagramme de l'effort tranchant

Moment fléchissant M_{fz} : dans la barre [12], $M_{fz}(1) = -M_{12} = -\frac{FL}{24}$, $M_{fz}(2) = M_{21} = \frac{FL}{12}$, M_{fz} est linéaire sur la barre.

dans la barre [23], le moment fléchissant est continu en 2, $M_{fz}(3) = M_{32} = -\frac{FL}{6}$, M_{fz} est linéaire sur la barre.

On peut compléter le diagramme par symétrie et vérifier que c'est compatible avec le diagramme des efforts tranchants.

11 Système poutre poteau :

Résoudre le problème suivant (Figure 29) par la méthode des déplacements simplifiée, tracer les diagrammes du moment fléchissant, de l'effort tranchant et de l'effort normal.

$$q = -50kN/m, a = 2m.$$

11.1 Discrétisation :

On utilise la discrétisation reportée sur la figure 30.

11.2 Dénombrement des inconnues

Prise en compte des conditions aux limites : Le nœud 1 et le nœud 3 sont encastres, on a donc :

$$X_1 = 0, Y_1 = 0, \Omega_1 = 0, X_3 = 0, Y_3 = 0, \Omega_3 = 0$$

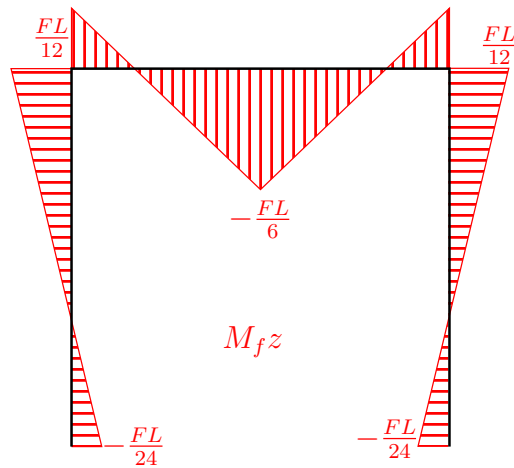


FIGURE 28: Diagramme du moment fléchissant

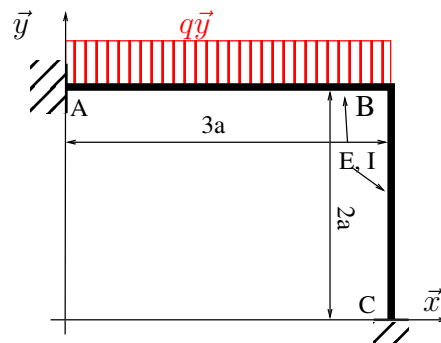


FIGURE 29: Système poutre poteau

Longueurs de barres invariantes :

— Sur la barre 1 – 2 : $u_{21} = u_{12} = 0$ soit $X_2 = 0$

— Sur la barre 2 – 3 : $u_{32} = u_{23} = 0$ soit $Y_2 = 0$

Il reste donc comme degré de liberté : $\Omega_2 = \omega_{21} = \omega_{23}$

11.3 Équations d'équilibre :

Application du PPV* : L'équation d'équilibre correspondant au degré de liberté Ω_2 est donnée par le déplacement virtuel illustré sur la figure 31.

On obtient donc l'équation d'équilibre suivante : $-M_{21}\omega^* - M_{23}\omega^* = 0$, $\forall \omega^*$ soit :

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

11.4 Comportement :

$$M_{21} = \frac{4EL}{3a}\Omega_2 + M_{21}^0 \text{ avec } M_{21}^0 = \frac{9qa^2}{12} = \frac{3qa^2}{4}$$

$$M_{23} = \frac{4EL}{2a}\Omega_2 + M_{23}^0 \text{ avec } M_{23}^0 = 0$$

11.5 Résolution :

$$\frac{4EL}{3a}\Omega_2 + \frac{3qa^2}{4} + \frac{2EL}{a}\Omega_2 = 0 \text{ soit}$$

$$\Omega_2 = -\frac{9qa^3}{40EI}$$

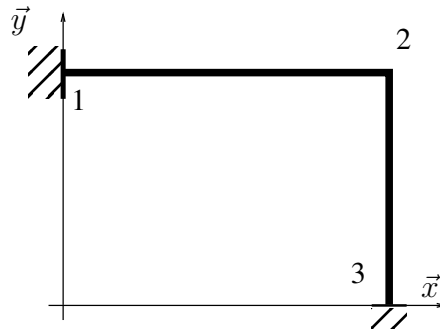


FIGURE 30: Discrétisation

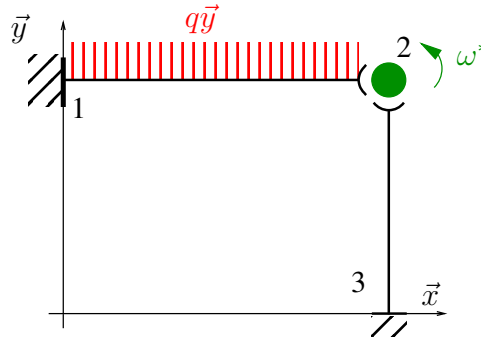


FIGURE 31: Mouvement virtuel

11.6 Calcul des efforts aux nœuds et tracé des diagrammes :

$$M_{12} = \frac{2EI}{3a} \frac{-9qa^3}{40EI} - \frac{3qa^2}{4} = qa^2 \left(-\frac{3}{20} - \frac{3}{4} \right) = -\frac{9qa^2}{10} = 180kNm$$

$$M_{21} = \frac{4EI}{3a} \frac{-9qa^3}{40EI} + \frac{3qa^2}{4} = qa^2 \left(-\frac{6}{20} + \frac{3}{4} \right) = \frac{9qa^2}{20} = -90kNm$$

$$M_{23} = -M_{21} = 90kNm$$

$$M_{32} = \frac{2EL}{2a} \Omega_2 = -\frac{9qa^2}{40} = 45kNm$$

$$V_{12} = \frac{6EI}{9a^2} \Omega_2 - \frac{3qa}{2} = -\frac{6qa}{40} - \frac{3qa}{2} = -\frac{33qa}{20} = 165kN$$

$$V_{21} = -\frac{6EI}{9a^2} \Omega_2 - \frac{3qa}{2} = \frac{6qa}{40} - \frac{3qa}{2} = -\frac{27qa}{20} = 135kN$$

$$V_{23} = \frac{6EI}{4a^2} \Omega_2 = -\frac{27qa}{80} = 33,75kN$$

$$V_{32} = -V_{23} = -33,75kN$$

On peut alors faire l'équilibre du nœud 2 et trouver les efforts normaux :

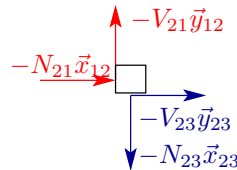


FIGURE 32: Équilibre du nœud 2

$$-N_{21} - V_{23} = 0 \text{ soit } N_{21} = \frac{27qa}{80} = -33,75kN$$

$$N_{23} - V_{21} = 0 \text{ soit } N_{23} = -\frac{27qa}{20} = 135kN$$

11.7 Tracé des diagrammes :

Effort normal :

— Dans la barre 1 – 2, $N = N_{21} = -33,75kN$

— Dans la barre 2 – 3, $n = -N_{23} = -135kN$

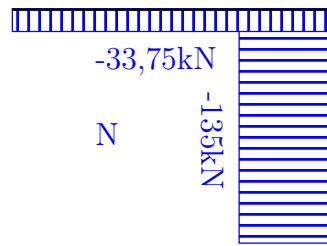


FIGURE 33: Effort Normal

Effort tranchant :

- en 1, $V_y = -V_{12} = -175\text{kN}$
- en 2 sur la barre 1 – 2, $V_y = V_{21} = 135\text{kN}$
- en 2 sur la barre 2 – 3, $V_y = -V_{23} = -33,75\text{kN}$
- en 3 sur la barre 2 – 3, $V_y = V_{32} = -33,75\text{kN}$

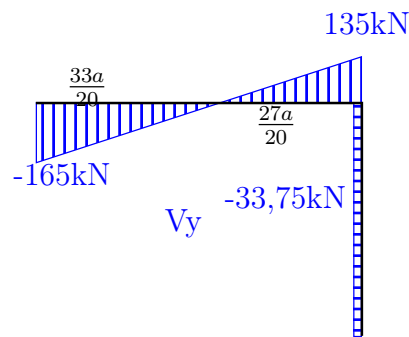


FIGURE 34: Effort Tranchant

Moment fléchissant :

- en 1, $M_{f1} = -M_{12} = \frac{9qa^2}{10} = -180\text{kNm}$
- en 2 sur la barre 1 – 2, $M_{f2} = M_{21} = \frac{9qa^2}{20} = -90\text{kNm}$
- sur la travée 1 – 2 :
 - Le moment fléchissant est obtenu par superposition du moment obtenu par variation linéaire entre les points 1 et 2 et celui dû à la charge répartie sur la poutre isostatique. Son maximum est obtenu au point M d'ordonnée $\frac{33a}{20}$ pour lequel l'effort tranchant s'annule.
 - $M_f(M) - M_{f1} = -\int_0^{\frac{33a}{20}} V_y dx$ soit $M_f(M) = \frac{9qa^2}{10} - \frac{33^2 qa^2}{2 \cdot 20^2} = -\frac{369qa^2}{800} = 92,25\text{kNm}$
- en 2 sur la barre 2 – 3, $M_f = -M_{23} = -90\text{kNm}$ (ou continuité)
- en 3 sur la barre 2 – 3, $M_f = M_{32} = 45\text{kNm}$

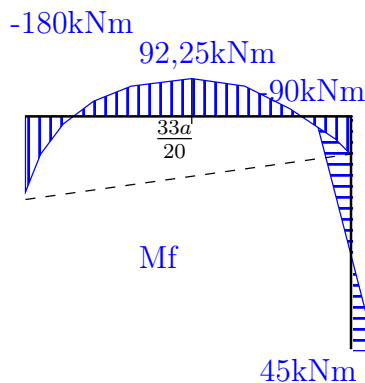


FIGURE 35: Moment fléchissant

12 Bâtiment à 1 niveau :

Un bâtiment à 1 niveau est représenté sur la figure 36. On supposera que les poutres ont une rigidité infinie devant celle des poteaux, ce qui impose que les rotations des nœuds extrémité des poutres sont supposées nulles.

Discrétiser, dénombrer les inconnues et écrire les équations du PTV*, résoudre et tracer le diagramme du moment fléchissant dans les poteaux.

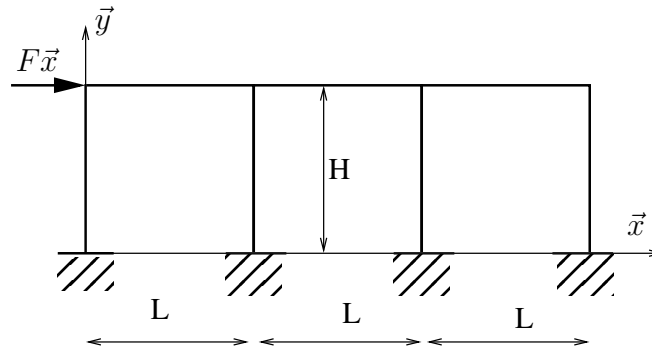


FIGURE 36: Bâtiment

12.1 Discrétisation :

On utilise la discrétisation reportée sur la figure 37.

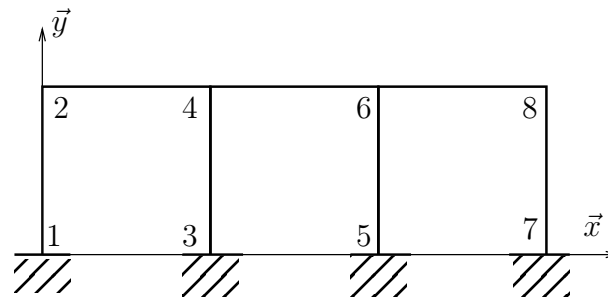


FIGURE 37: Discrétisation

12.2 Dénombrement des inconnues

Prise en compte des conditions aux limites : Les nœuds 1, 3, 5 et 7 sont encastres, on a donc :

$$X_1 = X_3 = X_5 = X_7 = 0, Y_1 = Y_3 = Y_5 = Y_7 = 0, \Omega_1 = \Omega_3 = \Omega_5 = \Omega_7 = 0$$

Poutres de grande raideur : Les rotations extrémité des poutres sont nulles :

$$\Omega_2 = \Omega_4 = \Omega_6 = \Omega_8 = 0$$

Longueurs de barres invariantes :

— Sur les poteaux : $Y_2 = Y_4 = Y_6 = Y_8 = 0$,

— Sur les poutres : $X_2 = X_4 = X_6 = X_8$

Il reste donc le déplacement horizontal du premier niveau comme degré de liberté : $X = -v_{21} = -v_{43} = -v_{65} = -v_{87}$

12.3 Équations d'équilibre :

L'équation d'équilibre correspondant au degré de liberté X est donnée par le déplacement virtuel illustré sur la figure 38.

La rotation ω^* et le déplacement X^* sont liés par la relation $X^* = -H\omega^*$ (sur la figure $X^* > 0$ et $\omega^* < 0$)

On obtient donc l'équation d'équilibre suivante :

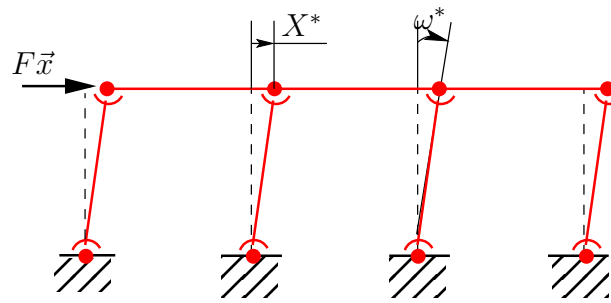


FIGURE 38: Discrétisation

$$FX^* + (M_{21} + M_{12} + M_{34} + M_{43} + M_{56} + M_{65} + M_{78} + M_{87})\Omega^* = 0 \text{ soit :}$$

$$M_{21} + M_{12} + M_{34} + M_{43} + M_{56} + M_{65} + M_{78} + M_{87} = FH$$

12.4 Comportement :

$$M_{12} = M_{34} = M_{56} = M_{78} = \frac{6EI}{H^2}X \text{ et } M_{21} = M_{43} = M_{65} = M_{87} = \frac{6EI}{H^2}X$$

12.5 Résolution :

$$8\frac{6EI}{H^2}X = FH$$

$$X = \frac{FH^3}{48EI}$$

12.6 Calcul des efforts aux nœuds

$$M_{ij} = \frac{6EI}{H^2}X = \frac{FH}{8} = M_{ji}$$

12.7 Tracé des diagrammes :

On obtient donc :

$$M_f(1) = M_f(3) = M_f(5) = M_f(7) = -\frac{FH}{8} \text{ et}$$

$$M_f(2) = M_f(4) = M_f(6) = M_f(8) = \frac{FH}{8}$$

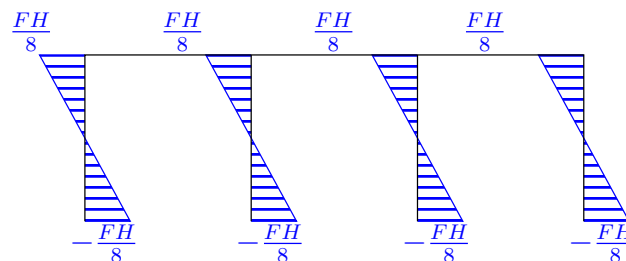


FIGURE 39: Moment fléchissant

13 Bâtiment à 2 niveaux :

Un bâtiment à 2 niveaux est représenté sur la figure 40. On supposera que les poutres ont une rigidité infinie devant celle des poteaux.

1. Hypothèses : montrer que cette condition impose que les rotations des nœuds extrémité des poutres sont nulles.

2. Discrétisation : discrétiser, dénombrer les inconnues et écrire les équations du PTV*
3. Résoudre.
4. Tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant dans les poteaux.

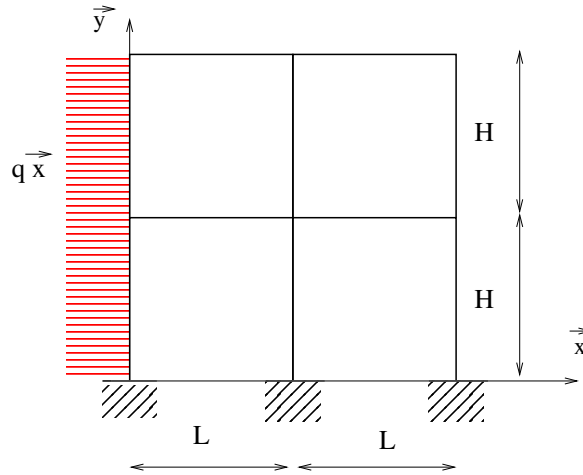


FIGURE 40: Bâtiment

13.1 Hypothèses

Les planchers sont supposés infiniment rigides par rapport aux poteaux, ils ont donc un mouvement de solide. Les hypothèses de longueur de barres invariantes sur les poteaux imposent donc que les mouvements des planchers soient horizontaux.

13.2 Discrétisation

On adopte la discrétisation représentée sur la figure 41. Les numérotations orientent tous les poteaux du bas vers le haut afin de rendre les équations plus faciles à écrire par la suite.

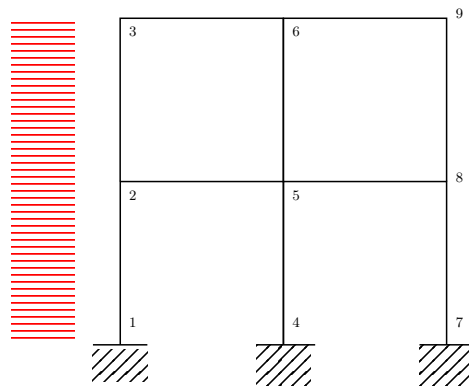


FIGURE 41: Bâtiment

13.3 Degrés de liberté

- Encastremets en 1,4 et 7 :
 - $u_{x1} = u_{y1} = u_{x4} = u_{y4} = u_{x7} = u_{y7} = 0$,
 - $\omega_1 = \omega_4 = \omega_7 = 0$
- Les rotations des planchers sont nulles :
 - $\omega_2 = \omega_3 = \omega_5 = \omega_6 = \omega_8 = \omega_9 = 0$

- Longueurs de barres invariantes dans les poteaux
 - $u_{y2} = u_{y3} = u_{y1} = 0$
 - $u_{y5} = u_{y6} = u_{y4} = 0$
 - $u_{y8} = u_{y9} = u_{y7} = 0$
- Longueurs de barres invariantes dans les planchers
 - $u_{x2} = u_{x5} = u_{x8}$
 - $u_{x3} = u_{x6} = u_{x9}$

Il reste donc deux degrés de liberté qui correspondent aux déplacements horizontaux des niveaux 1 et 2 : $u_{x2} = u_{x5} = u_{x8}$ et $u_{x3} = u_{x6} = u_{x9}$.

13.4 Équations d'équilibre

Pour chaque degré de liberté, on met en place un déplacement virtuel qui :

- met en œuvre le mouvement correspondant ;
- respecte les liaisons ;
- rend les barres indéformables (de façon à ce que la contribution des sollicitations au travail virtuel des efforts intérieurs soit nulle) ;
- peut rompre les liaisons entre les barres et les nœuds (le choix de les rompre uniquement en rotation rend souvent les problèmes plus facile à résoudre) ;
- on fait le choix des déplacements virtuels qui vont rendre les calculs de P_{int}^* les plus faciles, donc on rompt un minimum de liaisons.

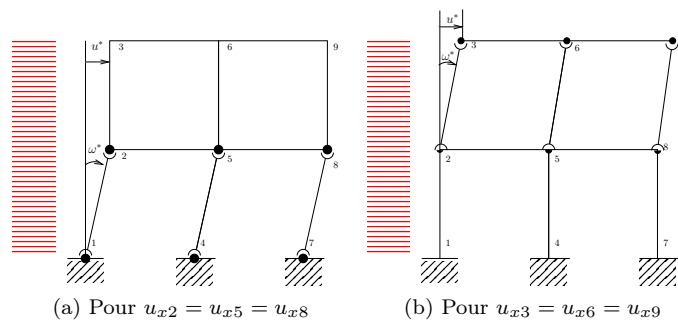


FIGURE 42: Champs de mouvements virtuels

Pour un mouvement virtuel linéaire en fonction de l'abscisse, les puissances virtuelles des charges uniformément réparties peuvent être calculées par le produit scalaire entre la résultante de la charge et la vitesse virtuelle du milieu du segment sur laquelle elle s'applique. On fait donc le calcul sur les barres [12] et [23] séparément.

Dans les deux cas, les barres sont en rotation, le travail virtuel des efforts intérieurs est la somme des produits des moments des nœuds sur les barres par les rotations des barres.

Pour $u_{x2} = u_{x5} = u_{x8}$ on obtient :

$$P_{ext}^* = qHu^* + qH\frac{u^*}{2} = \frac{3}{2}Hu^*$$

$$P_{int}^* = (M_{12} + M_{21})\omega^* + (M_{45} + M_{54})\omega^* + (M_{78} + M_{87})\omega^*$$

et $u^* = -H\omega^*$ (ω^* est négatif sur le dessin pour un u^* positif).

On obtient donc :

$$(M_{12} + M_{21})\omega^* + (M_{45} + M_{54})\omega^* + (M_{78} + M_{87})\omega^* - \frac{3}{2}qH^2\omega^* = 0, \forall \omega^*$$

$$\boxed{M_{12} + M_{21} + M_{45} + M_{54} + M_{78} + M_{87} = \frac{3}{2}qH^2} \quad (7)$$

Pour $u_{x3} = u_{x6} = u_{x9}$ on obtient :

$$P_{ext}^* = qH\frac{u^*}{2}$$

$$P_{int}^* = (M_{23} + M_{32})\omega^* + (M_{56} + M_{65})\omega^* + (M_{89} + M_{98})\omega^*$$

et $u^* = -H\omega^*$

Soit :

$$M_{23} + M_{32} + M_{56} + M_{65} + M_{89} + M_{98} = \frac{1}{2}qH^2 \quad (8)$$

13.5 Comportement

Il s'agit dans un premier temps d'exprimer les équations 7 et 8 du PTV^* en fonction des degrés de liberté u_{x2} et u_{x3} . Pour ceci on utilise les équations de comportement.

$$M_{12} + M_{21} = \frac{12EI}{H^2}(v_{12} - v_{21}) + M_{12}^0 + M_{21}^0 \text{ avec}$$

$$- v_{12} = -u_{x1} = 0$$

$$- v_{21} = -u_{x2} \text{ (} v_{21} \text{ est compté positif dans la direction de } \vec{y}_{12} = -\vec{x} \text{)}$$

$$- \text{La charge appliquée est } q\vec{x} = -q\vec{y}_{12} \text{ donc } M_{12}^0 = \frac{qH^2}{12} \text{ et } M_{21}^0 = -\frac{qH^2}{12}$$

$$\text{On obtient donc } M_{12} + M_{21} = \frac{12EI}{H^2}u_{x2}$$

$$\text{de la même manière } M_{45} + M_{54} = M_{78} + M_{87} = \frac{12EI}{H^2}u_{x2}$$

$$M_{23} + M_{32} = \frac{12EI}{H^2}(v_{23} - v_{32}) + M_{23}^0 + M_{32}^0 \text{ avec}$$

$$- v_{23} = -u_{x2}$$

$$- v_{32} = -u_{x3}$$

$$- M_{23}^0 = \frac{qH^2}{12} \text{ et } M_{32}^0 = -\frac{qH^2}{12}$$

$$\text{On obtient donc } M_{23} + M_{32} = \frac{12EI}{H^2}(u_{x3} - u_{x2})$$

$$\text{de la même manière } M_{56} + M_{65} = M_{89} + M_{98} = \frac{12EI}{H^2}u_{x2}$$

13.6 Résolution

$$\text{L'équation 7 devient } 3\frac{12EI}{H^2}u_{x2} = \frac{3}{2}qH^2$$

$$u_{x2} = \frac{qH^4}{24EI}$$

$$\text{L'équation 8 devient } 3\frac{12EI}{H^2}(u_{x3} - u_{x2}) = \frac{1}{2}qH^2$$

$$(u_{x3} - u_{x2}) = \frac{qH^4}{72EI}$$

$$u_{x3} = \frac{qH^4}{18EI}$$

13.7 Tracé des diagrammes dans les poteaux :

Le chargement étant réparti, il est conseillé de tracer le diagramme des efforts tranchants dans un premier temps.

13.7.1 Diagramme des V_y

Dans la barre [12]

$$V_{12} = \frac{12EI}{H^3}(v_{12} - v_{21}) + V_{12}^0 = \frac{12EI}{H^3}u_{x2} + \frac{qH}{2}$$

$$V_{12} = \frac{qH}{2} + \frac{qH}{2} = qH, \quad V_{12} = -\frac{qH}{2} + \frac{qH}{2} = 0$$

$$V_y(1) = -V_{12} = -qH \quad V_y(2) = V_{21} = 0$$

Dans la barre [23]

$$V_{23} = \frac{12EI}{H^3}(v_{23} - v_{32}) + V_{23}^0 = \frac{12EI}{H^3}(u_{x3} - u_{x2}) + \frac{qH}{2}$$

$$V_{23} = \frac{qH}{6} + \frac{qH}{2} = \frac{2qH}{3}, \quad V_{32} = -\frac{qH}{6} + \frac{qH}{2} = \frac{qH}{3}$$

$$V_y(2) = -V_{23} = -\frac{2qH}{3} \quad V_y(3) = V_{32} = \frac{qH}{3}$$

Dans les barres [45] et [78]

$$V_{45} = -V_{54} = \frac{12EI}{H^3}(v_{45} - v_{54}) = \frac{12EI}{H^3}u_{x2} = \frac{qH}{2}$$

$$V_y(4) = V_y(5) = -\frac{qH}{2} = V_y(7) = V_y(8)$$

Dans les barres [56]et [89]

$$V_{56} = -V_{65} = \frac{12EI}{H^3}(v_{56} - v_{65}) = \frac{12EI}{H^3}(u_{x3} - u_{x2}) = \frac{qH}{6}$$

$$V_y(5) = V_y(6) = -\frac{qH}{6} = V_y(8) = V_y(9)$$

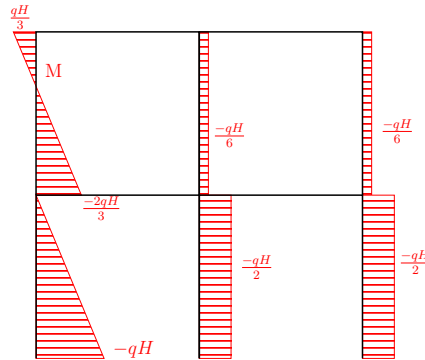


FIGURE 43: Diagramme des efforts tranchants V_y

13.7.2 Diagrammes des moments M_{fz}

Dans la barre [12]

$$M_{12} = \frac{6EI}{H^2}u_{x2} + M_{12}^0 = \frac{qH^2}{4} + \frac{qH^2}{12} = \frac{qH^2}{3}$$

$$M_{21} = \frac{6EI}{H^2}u_{x2} + M_{21}^0 = \frac{qH^2}{4} - \frac{qH^2}{12} = \frac{qH^2}{6}$$

L'effort tranchant s'annule au nœud 2 qui correspond à l'extrémum de la parabole.

$$M_{fz}(1) = -M_{12} = -\frac{qH^2}{3} \quad M_{fz}(2) = M_{21} = \frac{qH^2}{6}$$

Dans la barre [23]

$$M_{23} = \frac{6EI}{H^2}(u_{x3} - u_{x2}) + M_{23}^0 = \frac{qH^2}{12} + \frac{qH^2}{12} = \frac{qH^2}{6}$$

$$M_{32} = \frac{6EI}{H^2}(u_{x3} - u_{x2}) + M_{32}^0 = \frac{qH^2}{12} - \frac{qH^2}{12} = 0$$

$$M_{fz}(2) = -\frac{qH^2}{6} \quad M_{fz}(3) = 0$$

L'effort tranchant s'annule au point M d'abscisse $\frac{2H}{3}$ qui correspond à l'extrémum de la parabole.

$$M_{fz}(3) - M_{fz}(M) = -\int_M^3 V_y dx = -\frac{1}{2} \frac{qH}{3} \frac{H}{3} = -\frac{qH^2}{18}$$

$$M_{fz}(M) = \frac{qH^2}{18}$$

Dans les barres [45]et [78]

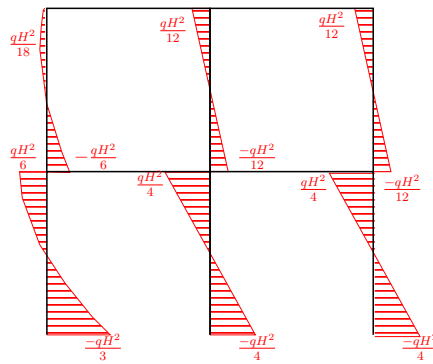
$$M_{fz}(4) = M_{fz}(7) - M_{45} = -\frac{6EI}{H^2}u_{x2} = -\frac{qH^2}{4}$$

$$M_{fz}(5) = M_{fz}(8) = M_{54} = \frac{6EI}{H^2}u_{x2} = \frac{qH^2}{4}$$

Dans les barres [56]et [89]

$$M_{fz}(5) = M_{fz}(8) - M_{56} = -\frac{6EI}{H^2}(u_{x3} - u_{x2}) = -\frac{qH^2}{12}$$

$$M_{fz}(6) = M_{fz}(9) = M_{65} = \frac{6EI}{H^2}(u_{x3} - u_{x2}) = \frac{qH^2}{12}$$

FIGURE 44: Diagramme des moments fléchissants M_{fz}

14 Bâtiment à 4 niveaux :

Un bâtiment à 3 niveaux est représenté sur la figure 45. On supposera que les poutres ont une rigidité infinie devant celle des poteaux (EI).

- Calculer les déplacements horizontaux des trois niveaux en fonction de q, E, I et H .
- Tracer les diagramme V_y et M_{fz} dans les poteaux.
- Calculer les moments dans les planchers en écrivant l'équilibre des nœuds et compléter le diagramme des M_{fz} .
- En déduire la valeur de l'effort tranchant dans les planchers et compléter le diagramme des V_y .
- Tracer le diagramme de l'effort normal.

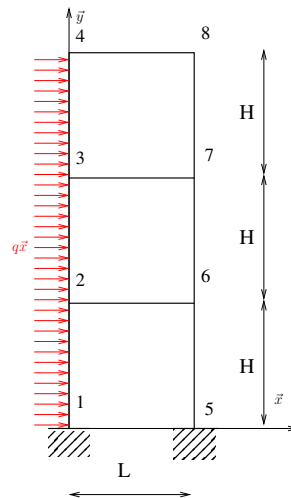


FIGURE 45: Bâtiment

14.1 Discrétisation

On propose la discrétisation représentée sur la figure 46a. La conformité des orientations des barres qui représentent les poteaux rendra ensuite les calculs plus aisés.

14.2 Dénombrement des inconnues :

Liasons : Les encastremements aux nœuds 1 et 5 impliquent des déplacements et rotations nulles en ces nœuds. $U_{x1} = U_{y1} = U_{x5} = U_{y5} = 0$, $\omega_1 = \omega_5 = 0$

Hypothèse des longueurs de barres invariantes (lbi) : lbi sur la barre [12] $\rightarrow U_{y2} = 0$ en appliquant lbi sur les poteaux on obtient également $U_{y3} = U_{y4} = U_{y6} = U_{y7} = U_{y8} = 0$

lbi sur les poutres horizontales $\rightarrow U_{x6} = U_{x2}$, $U_{x7} = U_{x3}$ et $U_{x8} = U_{x4}$

Hypothèse des planchers rigides : Les rotations des nœuds des planchers sont nulles : $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_6 = \omega_7 = \omega_8 = 0$

Il nous reste donc comme inconnues ou degré de liberté :

$$U_{x2} = U_{x6} = -v_{21} = -v_{23} = -v_{65} = -v_{67}$$

$$U_{x3} = U_{x7} = -v_{32} = -v_{34} = -v_{76} = -v_{78}$$

$$U_{x4} = U_{x8} = -v_{43} = -v_{87}$$

14.3 Équations d'équilibre :

Les mouvements virtuels associés aux 3 degrés de liberté sont représentés sur les figures 46b, 46c et 46d. Ces mouvements ont été choisis de façon à déplacer les degrés de liberté considérés et en minimisant les participations aux puissances virtuelles des efforts intérieurs.

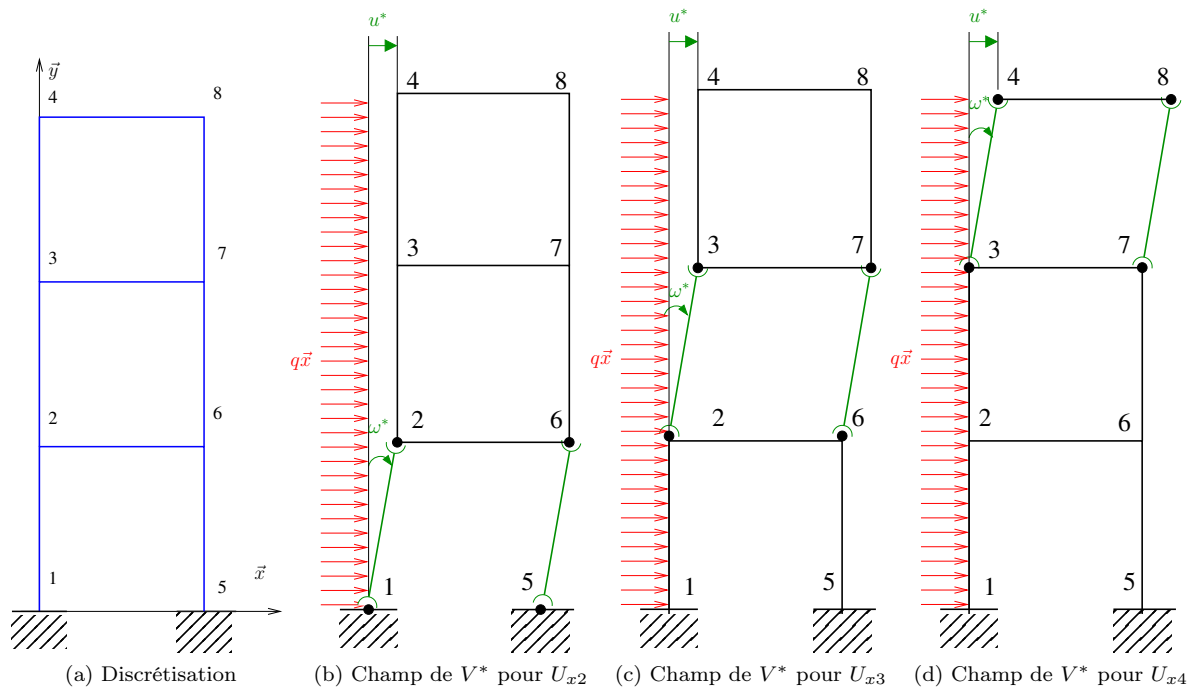


FIGURE 46: Discretisation et mouvements virtuels

Pour U_{x2} (Figure 46b) : La puissance virtuelle des efforts extérieurs est pour une charge répartie sur une barre est égale à la vitesse virtuelle du milieu de la barre, qui est le point d'application de la charge résultante de l'action répartie, multiplié par la résultante de la charge répartie.

— Pour la barre [12] : $qH \frac{u^*}{2}$

— Pour les autres barres : qHu^*

$$P_{ext}^* = \frac{5}{2}qHu^*$$

$$P_{int}^* = (M_{12} + M_{21} + M_{56} + M_{65})\omega^* \text{ et } u^* = -H\omega^*$$

$$PPV^* \longrightarrow P_{ext}^* + P_{int}^* = 0$$

$$(M_{12} + M_{21} + M_{56} + M_{65})\omega^* = \frac{5}{2}qH^2\omega^* \quad \forall \omega^*$$

$$\boxed{M_{12} + M_{21} + M_{56} + M_{65} = \frac{5}{2}qH^2} \quad (9)$$

Pour U_{x3} (Figure 46c) :

$$(M_{23} + M_{32} + M_{67} + M_{76})\omega^* = \frac{3}{2}qH^2\omega^* \quad \forall \omega^*$$

$$\boxed{M_{23} + M_{32} + M_{67} + M_{76} = \frac{3}{2}qH^2} \quad (10)$$

Pour U_{x4} (Figure 46d) :

$$(M_{34} + M_{43} + M_{78} + M_{87})\omega^* = \frac{3}{2}qH^2\omega^* \quad \forall \omega^*$$

$$\boxed{M_{34} + M_{43} + M_{78} + M_{87} = \frac{1}{2}qH^2} \quad (11)$$

14.4 Comportement

On utilise les équations $M_{ij} = \frac{4EI}{l_{ij}}\omega_{ij} + \frac{2EI}{l_{ij}}\omega_{ji} + \frac{6EI}{l_{ij}^2}(v_{ij} - v_{ji}) + M_{ij}^0$ et $M_{ji} = \frac{2EI}{l_{ij}}\omega_{ij} + \frac{4EI}{l_{ij}}\omega_{ji} + \frac{6EI}{l_{ij}^2}(v_{ij} - v_{ji}) + M_{ji}^0$ avec, pour une charge répartie $f\vec{y}_{ij}$ appliquée sur la travée :

$M_{ij}^0 = -\frac{fl_{ij}^2}{12}$, $M_{ji}^0 = \frac{fl_{ij}^2}{12}$. Dans notre cas nous avons $q\vec{x} = f\vec{y}_{ij}$ et $y_{ij} = -\vec{x}$. Donc $M_{ij}^0 = \frac{qH^2}{12}$ et $M_{ji}^0 = -\frac{qH^2}{12}$.
on a donc :

$$\begin{aligned} M_{12} &= -\frac{6EI}{H^2}v_{21} + \frac{qH^2}{12} \\ M_{12} &= \frac{6EI}{H^2}U_{x2} + \frac{qH^2}{12} = M_{56} \\ M_{21} &= \frac{6EI}{H^2}U_{x2} - \frac{qH^2}{12} = M_{65} \\ M_{23} &= \frac{6EI}{H^2}(U_{x3} - U_{x2}) + \frac{qH^2}{12} = M_{67} \\ M_{32} &= \frac{6EI}{H^2}(U_{x3} - U_{x2}) - \frac{qH^2}{12} = M_{76} \\ M_{34} &= \frac{6EI}{H^2}(U_{x4} - U_{x3}) + \frac{qH^2}{12} = M_{78} \\ M_{43} &= \frac{6EI}{H^2}(U_{x4} - U_{x3}) - \frac{qH^2}{12} = M_{87} \end{aligned}$$

14.5 Résolution

$$(9) \longrightarrow \frac{24EI}{H^2}U_{x2} = \frac{5}{2}qH^2$$

$$\boxed{U_{x2} = \frac{5qH^4}{48EI}}$$

$$(10) \longrightarrow \frac{24EI}{H^2}(U_{x3} - U_{x2}) = \frac{3}{2}qH^2$$

$$\boxed{U_{x3} = \frac{qH^4}{6EI}}$$

$$(11) \longrightarrow \frac{24EI}{H^2}(U_{x4} - U_{x3}) = \frac{1}{2}qH^2$$

$$\boxed{U_{x4} = \frac{3qH^4}{16EI}}$$

14.6 Calcul des efforts aux nœuds :

Pour la barre [12] $V_{12} = \frac{12EI}{H^3}U_{x2} + \frac{qH}{2} = \frac{5qH}{4} + \frac{qH}{2} = \frac{7qH}{4}$, $V_Y(1) = -V_{12} = -\frac{7qH}{4}$
 $V_{21} = -\frac{12EI}{H^3}U_{x2} + \frac{qH}{2} = -\frac{5qH}{4} + \frac{qH}{2} = -\frac{3qH}{4}$, $V_Y(2) = V_{21} = -\frac{3qH}{4}$
 $M_{12} = \frac{6EI}{H^2}U_{x2} + \frac{qH^2}{12} = \frac{5qH^2}{8} + \frac{qH^2}{12} = \frac{17qH^2}{24}$, $M_{fz}(1) = -M_{12} = -\frac{17qH^2}{24}$
 $M_{21} = \frac{6EI}{H^2}U_{x2} - \frac{qH^2}{12} = \frac{5qH^2}{8} - \frac{qH^2}{12} = \frac{13qH^2}{24}$, $M_{fz}(2) = M_{12} = \frac{13qH^2}{24}$

Pour la barre [23] $V_{23} = \frac{12EI}{H^3}(U_{x3} - U_{x2}) + \frac{qH}{2} = \frac{3qH}{4} + \frac{qH}{2} = \frac{5qH}{4}$, $V_Y(2) = -V_{23} = -\frac{5qH}{4}$
 $V_{32} = -\frac{12EI}{H^3}(U_{x3} - U_{x2}) + \frac{qH}{2} = -\frac{3qH}{4} + \frac{qH}{2} = -\frac{qH}{4}$, $V_Y(3) = V_{32} = -\frac{qH}{4}$
 $M_{23} = \frac{6EI}{H^2}(U_{x3} - U_{x2}) + \frac{qH^2}{12} = \frac{3qH^2}{8} + \frac{qH^2}{12} = \frac{11qH^2}{24}$, $M_{fz}(2) = -M_{23} = -\frac{11qH^2}{24}$
 $M_{32} = \frac{6EI}{H^2}(U_{x3} - U_{x2}) - \frac{qH^2}{12} = \frac{3qH^2}{8} - \frac{qH^2}{12} = \frac{7qH^2}{24}$, $M_{fz}(3) = M_{32} = \frac{7qH^2}{24}$

Pour la barre [34] $V_{34} = \frac{12EI}{H^3}(U_{x4} - U_{x3}) + \frac{qH}{2} = \frac{qH}{4} + \frac{qH}{2} = \frac{3qH}{4}$, $V_Y(3) = -V_{34} = -\frac{3qH}{4}$
 $V_{43} = -\frac{12EI}{H^3}(U_{x4} - U_{x3}) + \frac{qH}{2} = -\frac{qH}{4} + \frac{qH}{2} = \frac{qH}{4}$, $V_Y(4) = V_{43} = \frac{qH}{4}$
 $M_{34} = \frac{6EI}{H^2}(U_{x4} - U_{x3}) + \frac{qH^2}{12} = \frac{qH^2}{8} + \frac{qH^2}{12} = \frac{5qH^2}{24}$, $M_{fz}(3) = -M_{34} = -\frac{5qH^2}{24}$
 $M_{43} = \frac{6EI}{H^2}(U_{x4} - U_{x3}) - \frac{qH^2}{12} = \frac{H^2}{8} - \frac{qH^2}{12} = \frac{qH^2}{24}$, $M_{fz}(4) = M_{43} = \frac{qH^2}{24}$

Pour la barre [56] $V_{56} = \frac{12EI}{H^3}U_{x2} = \frac{5qH}{4} = -V_{65}$, $V_Y(5) = -V_{56} = -\frac{5qH}{4}$
 $M_{56} = M_{65} = \frac{5qH^2}{8}$, $M_{fz}(5) = -\frac{5qH^2}{8}$, $M_{fz}(6) = \frac{5qH^2}{8}$

Pour la barre [67] $V_{67} = \frac{12EI}{H^3}(U_{x3} - U_{x2}) = \frac{3qH}{4} = -V_{76}$, $V_Y(6) = -V_{67} = -\frac{3qH}{4}$
 $M_{67} = M_{76} = \frac{3qH^2}{8}$, $M_{fz}(6) = -\frac{3qH^2}{8}$, $M_{fz}(7) = \frac{3qH^2}{8}$

Pour la barre [78] $V_{78} = \frac{12EI}{H^3}(U_{x4} - U_{x3}) = \frac{qH}{4} = -V_{17}$, $V_Y(7) = -V_{78} = -\frac{qH}{4}$
 $M_{78} = M_{87} = \frac{qH^2}{8}$, $M_{fz}(7) = -\frac{qH^2}{8}$, $M_{fz}(8) = \frac{qH^2}{8}$

14.7 Tracé des diagrammes

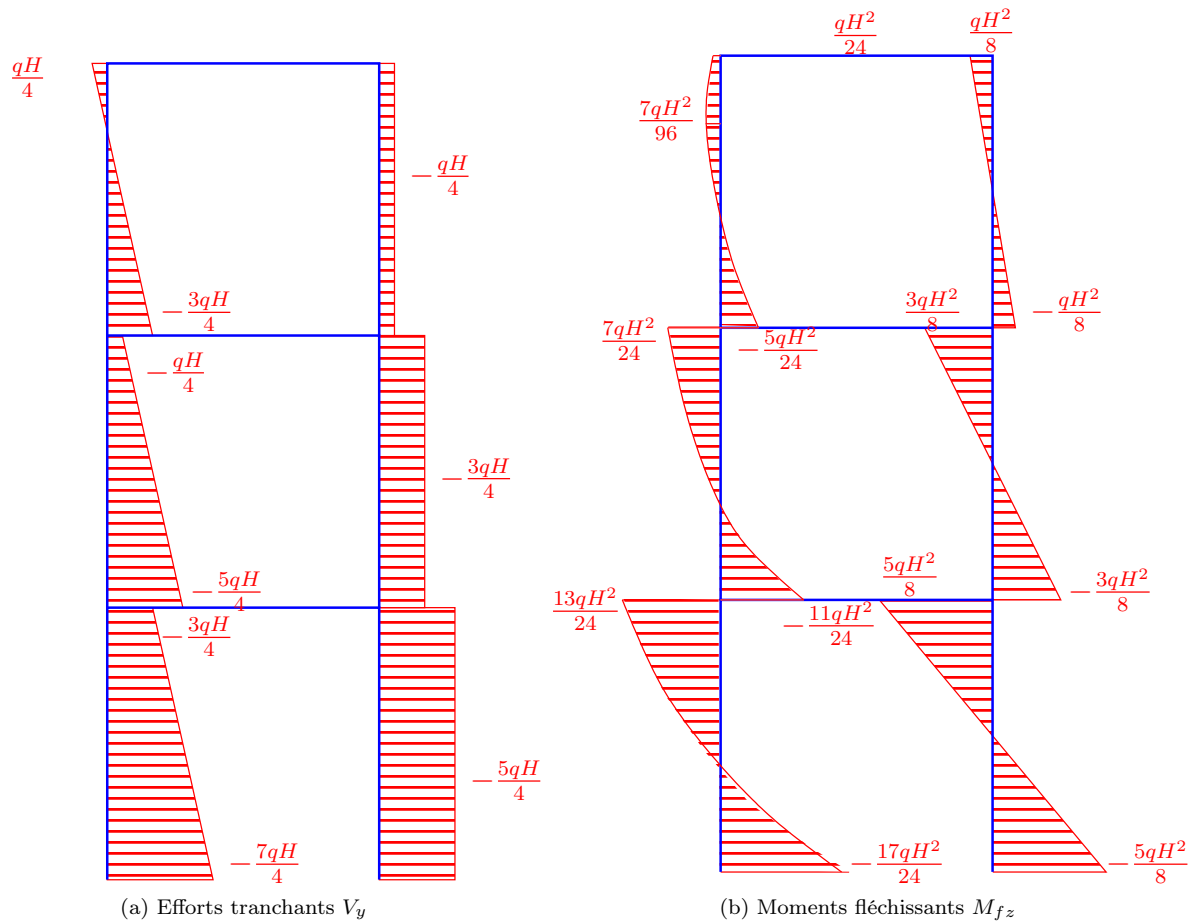


FIGURE 47: Diagrammes des sollicitations dans les poteaux