

Corrigé du contrôle de mécanique

ISA-BTP Deuxième année

18 février 2005

1 Potence :

1.1 Diagrammes :

Les diagrammes peuvent être tracés directement sans calcul :

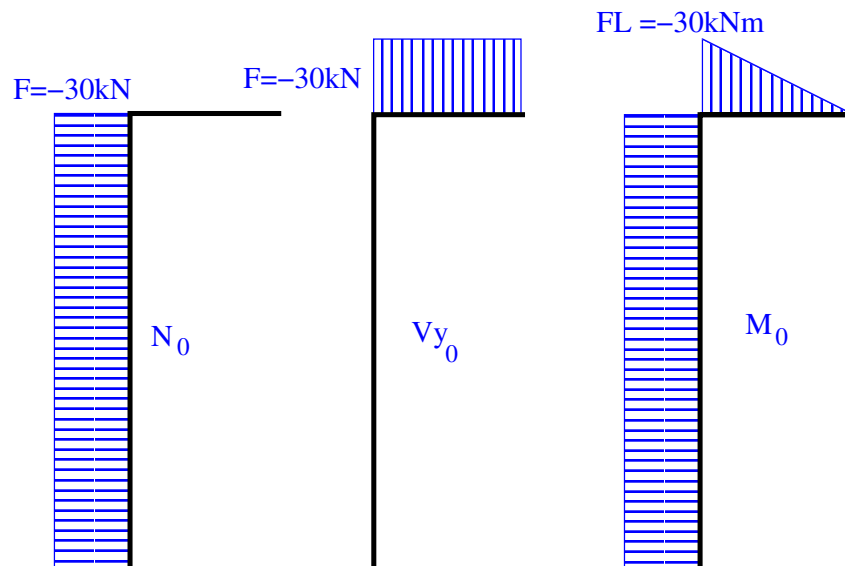


FIG. 1 – Diagrammes

1.2 Calcul du déplacement et de la rotation du point B :

Pour le déplacement, on utilise directement le théorème de Castigliano :

Soit W_m , l'énergie due au moment fléchissant : $W_e = \int \frac{M_o^2}{2EI_{Gz}} ds$ avec $I_{Gz} = \frac{b^4}{12}$ on a :

$$\delta_B = \frac{dW_e}{dF} = \frac{1}{EI_{Gz}} \int_{\Gamma} M_o \frac{dM_o}{dF} ds$$

et comme M_o est proportionnel à F on a $\frac{dM_o}{dF} = \frac{1}{F} M_o$

$$\delta_B = \frac{1}{FEI_{Gz}} \int_{\Gamma} M_o^2 ds$$

Le calcul de l'intégrale peut être facilement obtenu graphiquement : $\int_{\Gamma} M_o^2 ds = F^2 L^2 H + \frac{F^2 L^3}{3}$

$$\delta_B = \frac{FL^2}{3EI_{Gz}} (3H + L)$$

Application numérique : $\delta_B \simeq -10,24mm$

Pour la rotation du point B , on met en place un moment fictif $\mu_B \vec{z}$. Ce moment donne lieu aux moments fléchissants $M_1 = \mu_b \bar{M}_1$. Par superposition, le moment total est $M = M_0 + \mu_b \bar{M}_1$ et le théorème de Castigliano donne : $\omega_B = \frac{dW_e}{d\mu_B} |_{\mu_B=0}$, et $\omega_B = \int_{\Gamma} \frac{M_0 \bar{M}_1}{EI_{Gz}} ds$. Le diagramme \bar{M}_1 est donné sur la figure 2. L'intégrale peut être obtenue facilement graphiquement :

$$\int M_0 \bar{M}_1 ds = FLH + \frac{FL^2}{2}$$

On obtient $\omega_B = \frac{FL}{2EI_{Gz}} (2H + L)$. A.N. : $\omega_B \simeq 1,075 \cdot 10^{-2} rad$

1.3 Calcul de la rotation du point A

On met en place une force fictive $\varphi_A \vec{x}$ et un moment fictif $\mu_A \vec{z}$ au point A. Ces charges donnent lieu respectivement aux moments fléchissants $M_2 = \varphi_A \bar{M}_2$ et $M_3 = \mu_A \bar{M}_3$. Par superposition, le moment total est $M = M_0 + \varphi_A \bar{M}_2 + \mu_A \bar{M}_3$ et le théorème de Castigliano donne : $\delta_A = \frac{dW_e}{d\varphi_A} |_{\varphi_A=0}$ et $\omega_A = \frac{dW_e}{d\mu_A} |_{\mu_A=0}$.

on obtient donc : $\delta_A = \int_{\Gamma} \frac{M_0 \bar{M}_2}{EI_{Gz}} ds$ et $\omega_A = \int_{\Gamma} \frac{M_0 \bar{M}_3}{EI_{Gz}} ds$

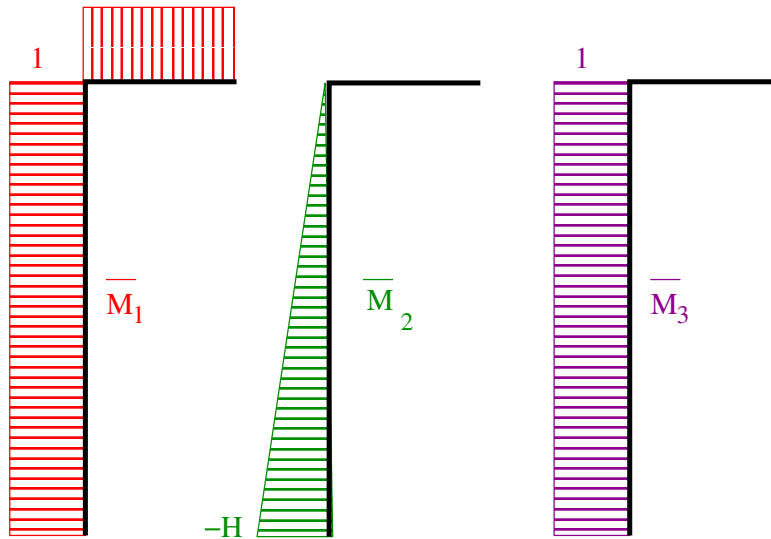


FIG. 2 – diagrammes des moments pour les problèmes fictifs

Les intégrales peuvent être obtenues facilement graphiquement :

$\int M_0 \bar{M}_2 ds = -\frac{FLH^2}{2}$ et $\int M_0 \bar{M}_3 ds = FLH$ et finalement :

$$\delta_A = -\frac{FLH^2}{2EI_{Gz}} \simeq 13,82mm \text{ et } \omega_A = \frac{FLH}{EI_{Gz}} \simeq -9,21 \cdot 10^{-3} rad$$

1.4 Allure de la déformée :

Dans l'hypothèse des petits déplacements et d'une énergie de flexion dominante, on néglige la déformée due à l'effort normal. Le déplacement vertical du point A est nul et le déplacement horizontal du point B est égal au déplacement horizontal du point A. D'autre part, l'encastrement en O impose que le déplacement et la rotation du point O soient nuls, on peut donc tracer l'allure de la déformée représentée sur la figure 3.



FIG. 3 – Allure de la déformée

2 Portique bi-encasté :

2.1 Décomposition du problème

Le problème original est hyperstatique d'ordre 3, il y a une symétrie représentée sur la figure 4 par une liaison glissière en D. Le problème symétrique est hyperstatique d'ordre 2. Je choisis comme inconnues hyperstatiques, les actions de liaison en D : X_D et M_D et le problème se décompose comme montré sur la figure 5.

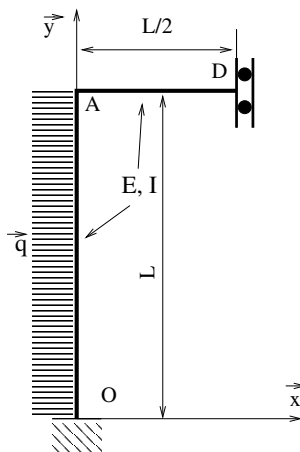


FIG. 4 – Problème symétrique

2.2 Tracé des diagrammes des sollicitations

Les diagrammes des sollicitations pour chaque problème se trouvent sans faire de calcul, il faut néanmoins faire attention à l'orientation du repère local de projection sur le poteau $[OA]$: $\vec{X} = \vec{y}$ et $\vec{Y} = -\vec{x}$

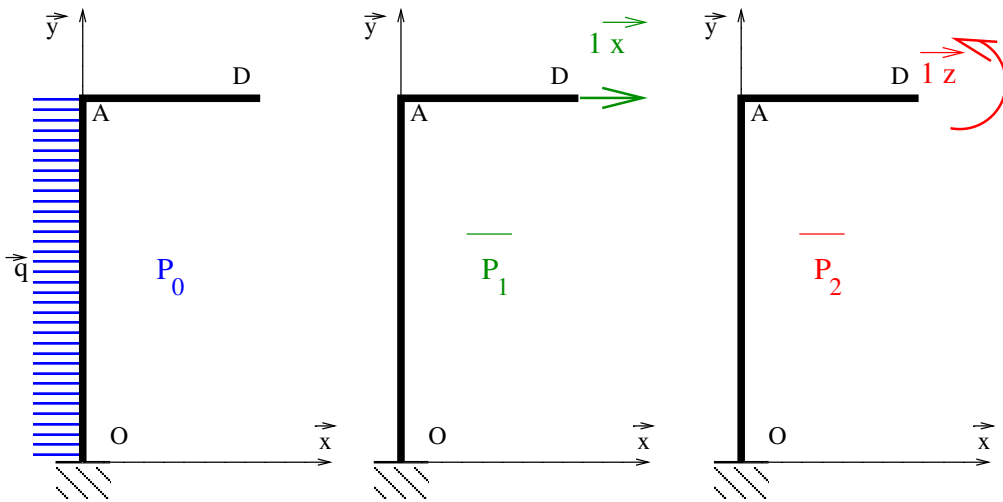


FIG. 5 – Décomposition du problème

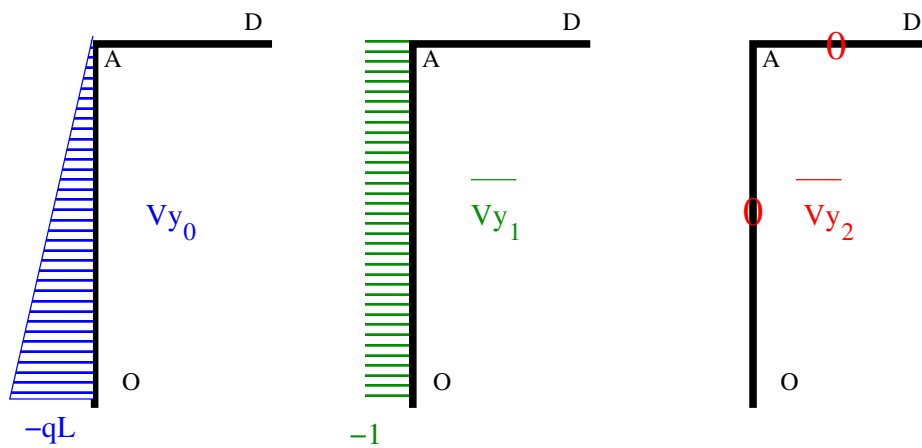


FIG. 6 – Efforts tranchants

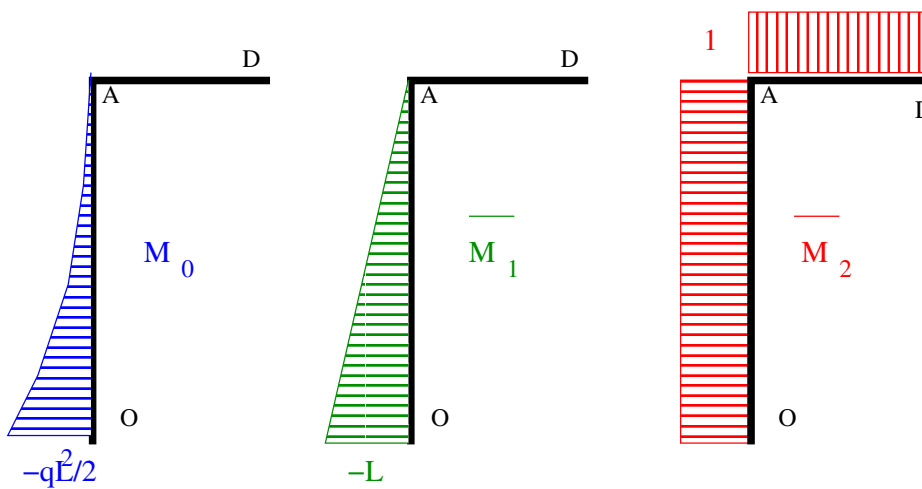


FIG. 7 – Moments fléchissants

2.3 Calcul des inconnues hyperstatiques

Les intégrales sont obtenues directement :

$$\begin{aligned} - \int M_O \bar{M}_1 &= \frac{qL^4}{8}, \int M_O \bar{M}_2 = -\frac{qL^3}{6}, \\ - \int \bar{M}_1 \bar{M}_1 &= \frac{L^3}{3}, \int \bar{M}_1 \bar{M}_2 = -\frac{L^3}{2}, \int \bar{M}_2 \bar{M}_2 = \frac{3L}{2} \end{aligned}$$

On peut alors écrire le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{L^3}{3} X_D + -\frac{L^2}{2} M_D = \frac{qL^4}{8} \\ -\frac{L^2}{2} X_D + \frac{3L}{2} M_D = \frac{qL^3}{6} \end{cases}$$

soit en simplifiant :

$$\begin{cases} 2LX_D - 3M_D = -\frac{3qL}{12} & (1) \\ -LX_D + 3M_D = \frac{qL^2}{3} & (2) \end{cases}$$

Ce système se résout facilement par combinaison des équations :

$$\begin{cases} (1) + (2) \rightarrow X_D = -\frac{5qL}{12} \\ 2 * (2) + 1 \rightarrow M_D = -\frac{qL^2}{36} \end{cases}$$

On peut alors tracer le diagramme de l'effort tranchant par superposition des problèmes :

pour tout point $M, V_y(M) = V_{y0}(M) + X_D \bar{V}_{y1}(M) + M_D \bar{V}_{y2}(M)$.

$V_y(O) = -qL - 1 * X_D + 0 * M_D = -qL + \frac{5qL}{12} = \frac{7qL}{12}$, $V_y(A) = 0 - 1 * X_D + 0 * M_D = \frac{5qL}{12}$ et $V_y(B) = 0$

L'effort tranchant s'annule pour le point E d'ordonnée $y = \frac{7L}{12}$

de même pour le moment fléchissant, nous avons :

$M_{fz}(0) = -\frac{qL^2}{2} + \frac{5qL^2}{12} - \frac{qL^2}{36} = -\frac{qL^2}{9}$, $M_{fz}(A) = M_{fz}(D) = -\frac{qL^2}{36}$ et $M_{fz}(A) - M_{fz}(E) = -\int_E^A V_y ds = -\frac{1}{2} \frac{5qL}{12} * \frac{5L}{12} = -\frac{25qL^2}{288}$ soit $M_{fz}(E) = \frac{17qL^2}{288}$

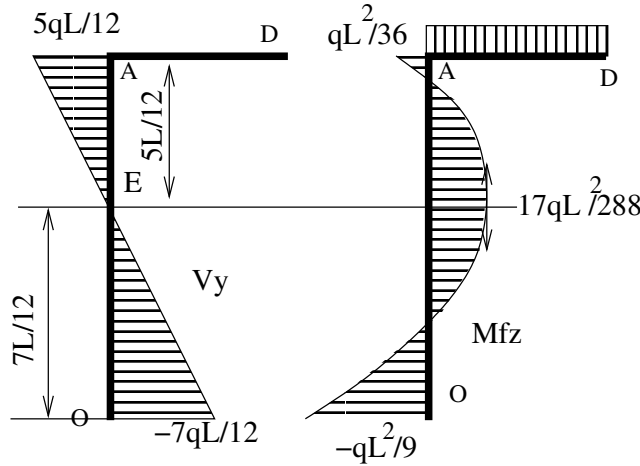


FIG. 8 – Sollicitations du problème hyperstatique

3 Poutre continue :

Le problème est hyperstatique d'ordre 2 (il est symétrique, mais la prise en compte de la symétrie ne réduit pas le nombre d'inconnues et ne simplifie pas le problème) et la décomposition se fait classiquement pour les poutres continues en introduisant une rotule au droit des appuis intermédiaires.

3.1 Calcul des inconnues hyperstatiques

Les inconnues hyperstatiques sont alors les moments fléchissants X_1 et X_2 au droit des appuis C_1 et C_2 . Les diagrammes de sollicitations des problèmes se tracent sans faire de calculs et sont reportés sur le tableau 1.

P_0	P_1	P_2

TAB. 1 – Décomposition du problème

Les intégrales s'obtiennent graphiquement :

$$\int M_0 \bar{M}_1 = -\frac{FL^2}{16}, \int M_0 \bar{M}_2 = -\frac{FL^2}{16},$$

$$\int \bar{M}_1 \bar{M}_1 = \frac{2L}{3}, \int \bar{M}_1 \bar{M}_2 = \frac{L}{6}, \int \bar{M}_2 \bar{M}_2 = \frac{2L}{3}$$

Ce qui donne le système d'équations :

$$\begin{cases} (1) & \frac{2L}{3}X_1 + \frac{L}{6}X_2 = -\frac{FL^2}{16} \\ (2) & \frac{L}{6}X_1 + \frac{2L}{3}X_2 = -\frac{FL^2}{16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) - (2) \rightarrow & X_1 = \frac{X_2}{3} \\ (1) \rightarrow & X_1 = \frac{3FL}{40} \end{cases}$$

3.2 Tracé des diagrammes de sollicitations

Les diagrammes sont alors obtenus par superposition (figure 9). Le moment en A est $M_{fz}(A) = -\frac{FL}{4} + \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 = -\frac{7FL}{40}$.

Le problème étant symétrique, le moment fléchissant est symétrique et l'effort tranchant anti-symétrique.

3.3 Calcul du déplacement du point A

On utilise le théorème de Castigliano :

$$\delta_A = \frac{dW_e}{dF} \text{ avec } W_e = \frac{1}{2EI_{Gz}} \int_{\Gamma} (M_0 + X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2)^2 ds$$

on peut écrire en utilisant les dérivées partielles $\frac{dW_e}{dF} = \frac{\partial W_e}{\partial F} + \frac{\partial W_e}{\partial X_1} \frac{dX_1}{dF} + \frac{\partial W_e}{\partial X_2} \frac{dX_2}{dF}$ or les équations

(1) et (2) sont $\frac{\partial W_e}{\partial X_1} = 0$ $\frac{\partial W_e}{\partial X_2} = 0$ on en déduit donc que $\delta_A = \frac{\partial W_e}{\partial F}$. On peut retrouver le même

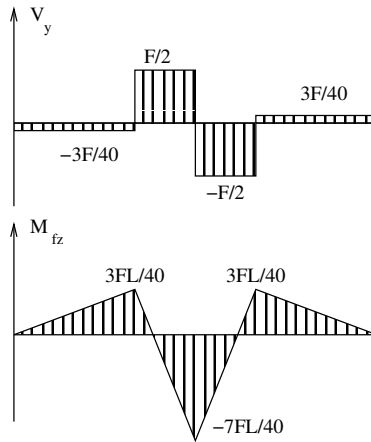


FIG. 9 – Diagrammes des sollicitations dans la poutre

résultat en développant et en reconnaissant les équations (1) et (2) comme dans l'exercice fait en TD.

On obtient donc $\delta_A = \frac{1}{EI_{Gz}} \int_{\Gamma} \frac{\partial M_0}{\partial F} (M_0 + X_1 \overline{M}_1 + X_2 \overline{M}_2) ds$ avec $\frac{\partial M_0}{\partial F} = \frac{M_0}{F} = \overline{M}_0$.

La plupart des intégrales sont déjà calculées, il reste à calculer $\int_{\Gamma} M_0 \overline{M}_0 = 2 * \frac{FL^2}{16} * \frac{L}{2} * \frac{1}{3} = \frac{FL^3}{18}$

On obtient $\delta_A = \frac{1}{EI_{Gz}} \left(\frac{FL^3}{18} + \frac{3FL}{40} \frac{-L^2}{16} + \frac{3FL}{40} \frac{-L^2}{16} \right)$

$$\delta_A = \frac{11FL^3}{960EI_{Gz}}$$