

Corrigé du contrôle de mécanique

ISA-BTP Deuxième année

1^{ier} Mars 2004

1 Potence :

1.1 Diagrammes :

Les diagrammes peuvent être tracés directement sans calcul :

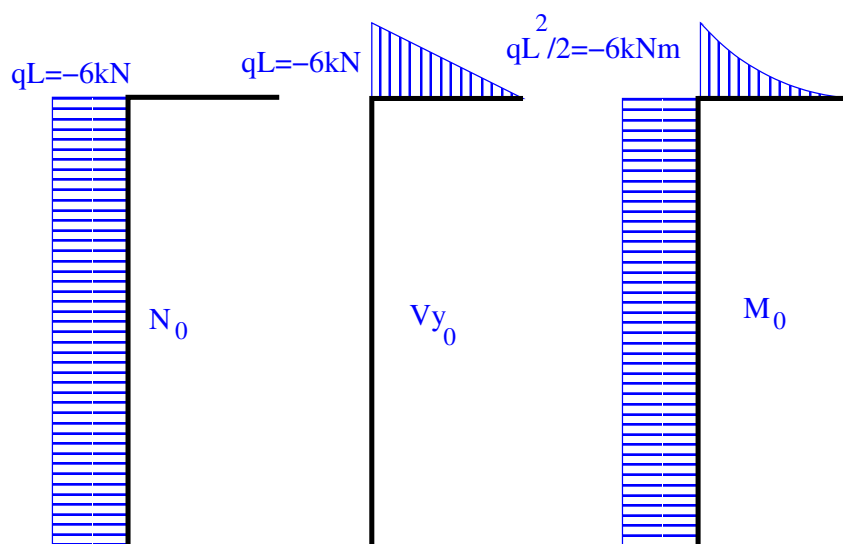


FIG. 1 – Diagrammes

1.2 Calcul des énergies élastiques :

Soit W_N , l'énergie élastique due à l'effort normal : $W_N = \int_{\Omega} \frac{N_0^2}{2EA} ds$ soit avec $A = b^2$ on obtient

$$W_N = \frac{q^2 L^2 H}{2Eb^2} = 0,0288J$$

Soit W_m , l'énergie due au moment fléchissant : $W_m = \int_{\Omega} \frac{M_0^2}{2EI_{Gz}} ds$ avec $I_{Gz} = \frac{b^4}{12}$ on a :

$$W_m = \frac{3q^2 L^4 \left(\frac{L}{5} + H\right)}{4Eb^4} = 3,133J$$

Le rapport des énergies est $\frac{W_m}{W_N} = \frac{3L^2 \left(\frac{L}{5} + H\right)}{2b^2 H}$. L'application numérique donne $\frac{W_m}{W_N} = 108,8$, on se situe donc à la limite où on peut négliger l'énergie due à l'effort normal par rapport à celui du au moment fléchissant.

1.3 Calcul du déplacement et de la rotation du point B

On met en place une force fictive $\varphi \vec{y}$ et un moment fictif $C\vec{z}$ au point B. Ces charges donnent lieu respectivement aux moments fléchissants $M_1 = \varphi \bar{M}_1$ et $M_2 = C \bar{M}_2$. Par superposition, le moment total est $M = M_0 + \varphi \bar{M}_1 + C \bar{M}_2$ et le théorème de Castigliano donne : $\delta_B = \frac{dW_e}{d\varphi} |_{\varphi=0}$ et $\omega_B = \frac{dW_e}{dC} |_{C=0}$, on fera l'hypothèse d'une structure à énergie de flexion dominante et on obtient donc : $\delta_B = \int_{\Omega} \frac{M_0 \bar{M}_1}{EI_{Gz}} ds$ et $\omega_B = \int_{\Omega} \frac{M_0 \bar{M}_2}{EI_{Gz}} ds$

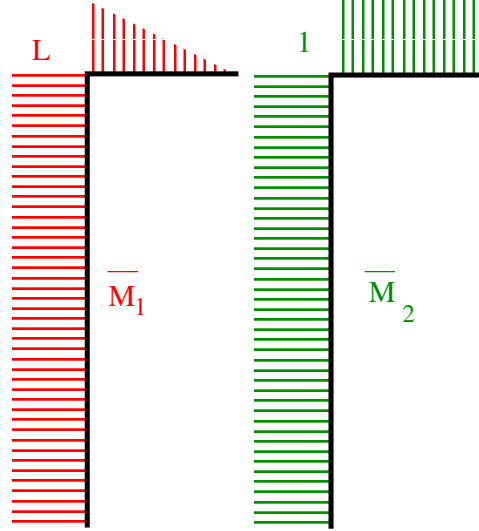


FIG. 2 – diagrammes des moments pour les problèmes fictifs

Les intégrales peuvent être obtenues facilement graphiquement :

$\int M_0 \bar{M}_1 ds = \frac{qL^4}{8} + \frac{qL^3 H}{2}$ et $\int M_0 \bar{M}_2 ds = \frac{qL^3}{6} + \frac{qL^2 H}{2}$ et finalement :

$$\delta_B = \frac{qL^3}{8EI_{Gz}} (L + 4H) = -4,3mm \text{ et } \omega_B = \frac{qL^2}{6EI_{Gz}} (L + 3H) = 2,25 * 10^{-3} rad$$

2 Portique bi-encasté :

Le problème est hyperstatique d'ordre 3, je choisis de décomposer le problème en libérant la liaison d'encastrement au point C. Les trois inconnues hyperstatiques sont : X_c , Y_c et M_c .

Les intégrales sont obtenues directement :

$$\begin{aligned} - \int M_0 \bar{M}_1 &= -\frac{qL^4}{24}, \int M_0 \bar{M}_2 = -\frac{qL^4}{6}, \int M_0 \bar{M}_3 = -\frac{qL^3}{6} \\ - \int \bar{M}_1 \bar{M}_1 &= \frac{L^3}{3} + L^3 + \frac{L^3}{3} = \frac{5L^3}{3}, \int \bar{M}_1 \bar{M}_2 = \frac{L^3}{2} + \frac{L^3}{2} = L^3, \int \bar{M}_1 \bar{M}_3 = \frac{L^2}{2} + L^2 + \frac{L^2}{2} = 2L^2 \\ - \int \bar{M}_2 \bar{M}_2 &= L^3 + \frac{L^3}{3} = \frac{4L^3}{3}, \int \bar{M}_2 \bar{M}_3 = L^2 + \frac{L^2}{2} = \frac{3L^2}{2} \\ - \int \bar{M}_3 \bar{M}_3 &= L + L + L = 3L \end{aligned}$$

On peut alors écrire le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{5L^3}{3} X_C + L^3 Y_C + 2L^2 M_C = \frac{qL^4}{24} \\ L^3 X_C + \frac{4L^3}{3} Y_C + \frac{3L^2}{2} M_C = \frac{qL^4}{6} \\ 2L^2 X_C + \frac{3L^2}{2} Y_C + 3L M_C = \frac{qL^3}{6} \end{cases}$$

soit en simplifiant :

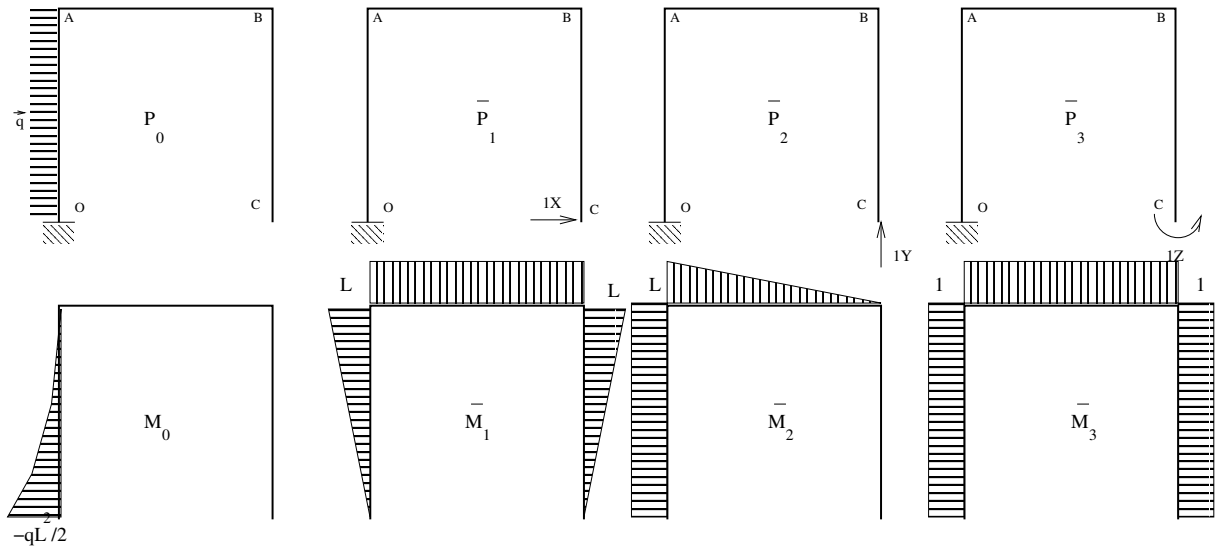


FIG. 3 – Diagrammes des moments

$$\begin{cases} 5LX_C + 3LY_C + 6M_C = \frac{qL^2}{8} \\ 6LX + 8LY_C + 9M_C = \frac{qL^2}{6} \\ 4LX_C + 3LY + 6M_C = \frac{qL}{3} \end{cases}$$

Ce système se résout facilement par combinaison des équations.

3 Poutre encastrée appuyée :

Le problème est hyperstatique d'ordre 1, je choisis la réaction d'appui en A comme inconnue hyperstatique. La décomposition du problème et les diagrammes des moments sont indiqués sur la figure 4.

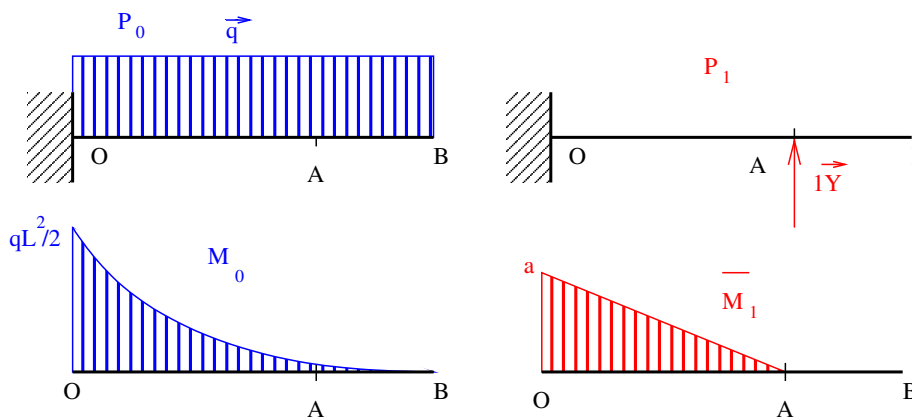


FIG. 4 – Décomposition du problème et moments

$\int M_O \bar{M}_1$ doit être calculée analytiquement : $\int M_O \bar{M}_1 = \int_0^a \frac{q(L-x)^2}{2} (a-x) dx = \frac{qa^2}{24} (a^2 + 6L^2 - 4aL)$
 et $\int \bar{M}_1 \bar{M}_1 = \frac{a^3}{3}$

L'inconnue hyperstatique est donc $Y_A = -\frac{\int M_O \bar{M}_1}{\int \bar{M}_1 \bar{M}_1} = -\frac{q}{8a} (a^2 + 6L^2 - 4aL)$
 Le moment fléchissant du problème hyperstatique est

$$M = M_0 + Y_A \bar{M}_1 = \frac{q(L-x)^2}{2} - \frac{q}{8a} (a^2 + 6L^2 - 4aL) (a-x)$$

On peut prendre $a = \frac{3L}{4}$ pour tracer le diagramme des moments :

On obtient alors $Y_A = -\frac{q}{8L} \left(\frac{9L^2}{16} + 6L^2 - 3L^2 \right) = -\frac{19qL}{32}$

On a alors $M(O) = \frac{qL^2}{2} - \frac{3L}{4} \frac{19qL}{32} = \frac{7qL^2}{128}$ et $M_A = \frac{q(L-a)^2}{2} = \frac{qL^2}{32}$ et on obtient le diagramme donné sur la figure 5.

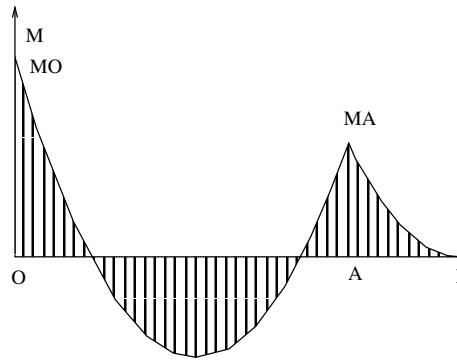


FIG. 5 – Moments pour $a = \frac{3L}{4}$

Le moment maximal sur la travée est optimisé lorsque $M(O) = M(A)$ soit :

$\frac{qL^2}{2} - \frac{q}{8} (a^2 + 6L^2 - 4aL) = \frac{q(L-a)^2}{2}$ ou encore $a^2 - 12aL + 6L^2 = 0$ cette équation possède 2 solutions : $a_1 = \frac{L(6-\sqrt{6})}{5}$ et $a_2 = \frac{L(6+\sqrt{6})}{5}$ seule la première solution est envisageable.