Exercice sur les torseurs :

17 septembre 2002

1 Sujet :

Soient deux torseurs $\Im_1 \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{A1}$ et $\Im_2 \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_2} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{A2}$, $R\left(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ un repère orthonormé direct. On donne $\overrightarrow{OA_1} = a_1 \overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{OA_2} = a_2 \overrightarrow{y}$ et

$\overrightarrow{F_1} = X_1 \overrightarrow{x} + Y_1 \overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{F_2} = Z_2 \overrightarrow{z}$

- Trouver le torseur $\Im_3$tel que $\Im_1 + \Im_2 + \Im_3 = \{0\}$
- Trouver un point A_3de moment nul pour $\Im_3$.

2 Correction :

Afin de minimiser les calculs, on se propose d'écrire les éléments de réduction (résultante et moment) de $\Im_3$ en A_1 : $\Im_3 \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_3} \\ \overrightarrow{M_3} \end{array} \right\}_{A1}$ on peut alors écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{M_3} = \overrightarrow{0} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_3} = -X_1 \overrightarrow{x} - Y_1 \overrightarrow{y} - Z_2 \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{M_3} = -\left(-a_1 \overrightarrow{x} + a_2 \overrightarrow{y}\right) \wedge Z_2 \overrightarrow{z} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_3} = -X_1 \overrightarrow{x} - Y_1 \overrightarrow{y} - Z_2 \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{M_3} = -Z_2 \left(a_1 \overrightarrow{y} + a_2 \overrightarrow{x}\right) \end{array} \right.$$

Posons $\overrightarrow{OA_3} = a_3 \overrightarrow{x} + b_3 \overrightarrow{y} + c_3 \overrightarrow{z}$

$\overrightarrow{M_3} = \overrightarrow{M_{\left(A_1, \overrightarrow{F_3}\right)}} = \overrightarrow{M_{\left(A_3, \overrightarrow{F_3}\right)}} + \overrightarrow{A_1A_3} \wedge \overrightarrow{F_3}$

$\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{A_1O} + OA_3 = -\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3} = (a_3 - a_1) \overrightarrow{x} + b_3 \overrightarrow{y} + c_3 \overrightarrow{z}$

on a donc : $-Z_2 \left(a_1 \overrightarrow{y} + a_2 \overrightarrow{x}\right) = \left[(a_3 - a_1) \overrightarrow{x} + b_3 \overrightarrow{y} + c_3 \overrightarrow{z}\right] \wedge \left[-X_1 \overrightarrow{x} - Y_1 \overrightarrow{y} - Z_2 \overrightarrow{z}\right]$

$-Z_2 \left(a_1 \overrightarrow{y} + a_2 \overrightarrow{x}\right) = (a_3 - a_1)\left(-Y_1 \overrightarrow{z} + Z_2 \overrightarrow{y}\right) + b_3 \left(X_1 \overrightarrow{z} - Z_2 \overrightarrow{x}\right) + c_3 \left(-X_1 \overrightarrow{y} + Y_1 \overrightarrow{x}\right)$

soit : $\left\{ \begin{array}{l} -Z_2a_2 = -b_3Z_2 + c_3Y_1 \\ -Z_2a_1 = (a_3 - a_1) Z_2 - c_3X_1 \\ 0 = -(a_3 - a_1) Y_1 + b_3X_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -b_3Z_2 + c_3Y_1 = -Z_2a_2 \\ a_3Z_2 - c_3X_1 = 0 \\ -a_3Y_1 + b_3X_1 = -Y_1a_1 \end{array} \right.$

On peut constater que le déterminant de ce système est nul, ce qui signifie qu'il possède soit une infinité de solutions soit aucune solution.

On peut aussi réduire le système à un système de deux équations à deux inconnues en substituant c3 par la valeur obtenue à partir de la deuxième équation :

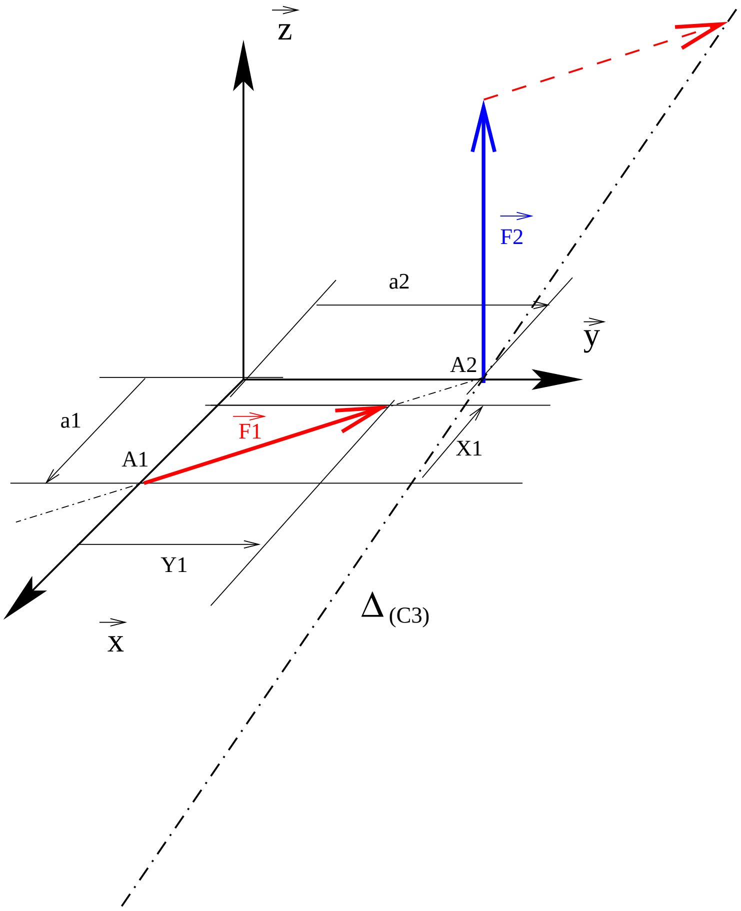

FIG. 1 – Droites d'actions concourantes

$$\begin{cases} c_3 = \frac{a_3 Z_2}{X_1} \\ a_3 \frac{Z_2}{X_1} Y_1 - b_3 Z_2 = -Z_2 a_2 \\ -a_3 Y_1 + b_3 X_1 = -Y_1 a_1 \end{cases}$$

soit en multipliant la deuxième équation par $-\frac{X_1}{Z_2}$:

$$\begin{cases} c_3 = \frac{a_3 Z_2}{X_1} \\ -a_3 Y_1 + b_3 X_1 = X_1 a_2 \\ -a_3 Y_1 + b_3 X_1 = -Y_1 a_1 \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont liées et ce système n'a de solution que si $X_1 a_2 = -Y_1 a_1$.C'est à dire que les droites d'action de $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont concourantes. Dans ce cas La position de C_3 est donnée par :

$$a_3 = \alpha$$
$$b_3 = \frac{X_1 a_2 + \alpha Y_1}{X_1}$$ (Représenté par Δ sur la figure)
$$c_{3=\alpha\alpha}\alpha\frac{Z_2}{X_1}$$