

Notion de contrainte

Institut Supérieur Aquitain du Bâtiment et des Travaux Publics



Table des matières

1	Contrainte :	3
1.1	Définition :	3
1.2	Projections du vecteur contrainte :	4
1.2.1	Contraintes normales et tangentielles :	4
1.2.2	Projection sur des vecteurs de base :	4
1.3	Tenseur des contraintes :	4
1.3.1	Symétrie des contraintes	5
1.3.2	Linéarité de la contrainte :	5
1.3.3	Tenseur des contraintes	6
1.3.4	Symétrie du tenseur des contraintes	6
1.4	Équations d'équilibre :	7
2	Cercle de Mohr (2D)	7

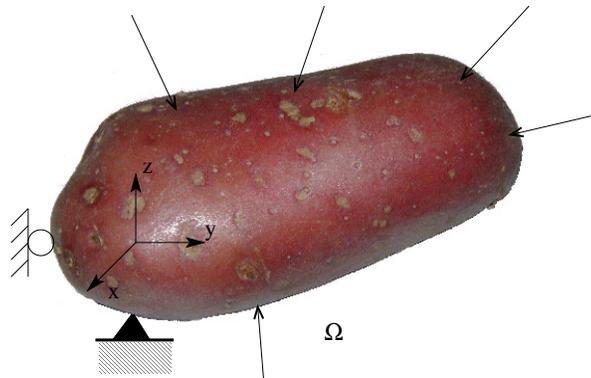
1 Contrainte :

Les contraintes représentent les efforts de cohésion dans un solide qui permettent à la matière à résister aux sollicitations.

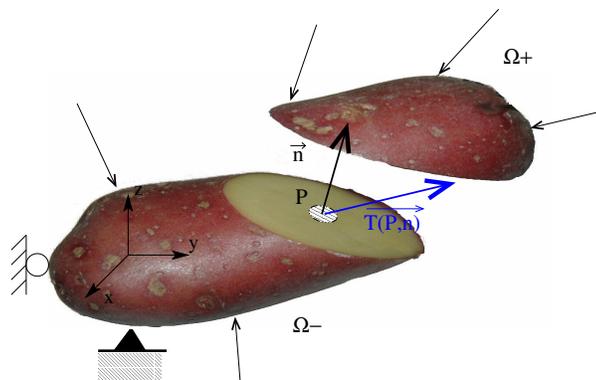
Les contraintes sont issues d'interaction entre des petites parties de la matière (cristaux, molécules ... etc ...).
L'équivalent de la contrainte pour un fluide parfait est la pression.

1.1 Définition :

Soit un corps Ω sollicité par un ensemble d'actions mécaniques et en équilibre dans un référentiel. Toute partie de Ω est en équilibre.



Si on coupe Ω par un plan de normale \vec{n} passant par le point P, les deux parties Ω^+ située du côté de la normale et Ω^- située du côté opposé, sont en équilibre.



Ω^+ est en équilibre sous l'effet :

- Des efforts extérieurs qui lui sont exercés.
- De la contrainte $\vec{T}(P, \vec{n})$ exercée en tout point P du plan de coupure.

Le vecteur contrainte $\vec{T}(P, \vec{n})$ est la densité surfacique des efforts exercés par Ω^+ sur Ω^- . C'est la grandeur physique associée à la contrainte.

Remarques :

Le vecteur contrainte est homogène à un effort par unité de surface ou une pression, il s'exprime en Pascals.

$$1Pa = 1N/m^2, 1MPa = 10^6 Pa, 1kPa = 10^3 Pa, 1GPa = 10^9 Pa$$

Il existe aussi des unités plus exotiques :

$$1T/m^2 \simeq 10kPa, 1kg/cm^2 \simeq 100kPa, 1bar = 100kPa, 1PSI \simeq 6,9MPa$$

L'emploi de ces unités est vivement déconseillé.

Si en un point P on effectue deux plans de coupure de normales \vec{n}_1 et \vec{n}_2 , on obtient deux vecteurs contraintes $T(P, \vec{n}_1)$ et $T(P, \vec{n}_2)$ qui sont a priori différents.

En deux points P et Q d'un même plan de coupure de normale \vec{n} on obtient deux vecteurs contraintes $T(P, \vec{n})$ et $T(Q, \vec{n})$ qui sont a priori différents.

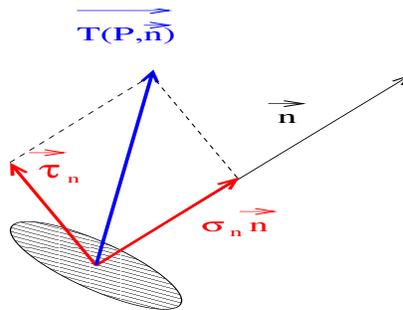
Le torseur résultant des actions de Ω^+ sur Ω^- pour un plan de coupure Π de normale \vec{n} est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_{\Omega^+/\Omega^-}} = \int_{\Pi} \overrightarrow{T(P, \vec{n})} ds \\ \overrightarrow{M_{A, \Omega^+/\Omega^-}} = \int_{\Pi} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{T(P, \vec{n})} ds \end{array} \right\}_A$$

1.2 Projections du vecteur contrainte :

1.2.1 Contraintes normales et tangentielles :

Le vecteur contrainte se décompose en une contrainte normale σ_n et une contrainte tangentielle $\vec{\tau}_n$.

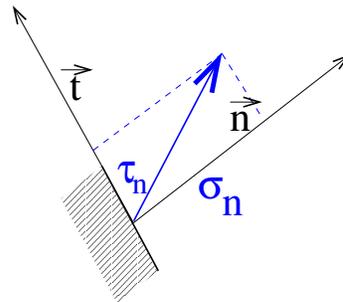


On peut écrire : $\sigma_n = \overrightarrow{T(P, \vec{n})} \cdot \vec{n}$ $\vec{\tau}_n = \overrightarrow{T(P, \vec{n})} \cdot \vec{n} - \sigma_n \vec{n}$

— La contrainte normale σ_n est un nombre.

— La contrainte tangentielle $\vec{\tau}_n$ est un vecteur.

Dans le cas d'une hypothèse de calcul plan (plan normal à l'axe \vec{z}) nous pouvons projeter le vecteur contrainte sur les vecteur \vec{n} et $\vec{t} = \vec{z} \wedge \vec{n}$:



$\sigma_n = \overrightarrow{T(P, \vec{n})} \cdot \vec{n}$ $\tau_n = \overrightarrow{T(P, \vec{n})} \cdot \vec{t}$

Dans ce cas les contraintes normale et tangentielle sont des nombres.

1.2.2 Projection sur des vecteurs de base :

Soit $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ une base (orthonormée directe tant qu'à faire), on nomme les projections des vecteurs contraintes de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \overrightarrow{T(P, \vec{x})} \cdot \vec{x} \\ \sigma_{xy} = \overrightarrow{T(P, \vec{x})} \cdot \vec{y} \\ \sigma_{xz} = \overrightarrow{T(P, \vec{x})} \cdot \vec{z} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{yy} = \overrightarrow{T(P, \vec{y})} \cdot \vec{y} \\ \sigma_{yz} = \overrightarrow{T(P, \vec{y})} \cdot \vec{z} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{zx} = \overrightarrow{T(P, \vec{z})} \cdot \vec{x} \\ \sigma_{zy} = \overrightarrow{T(P, \vec{z})} \cdot \vec{y} \\ \sigma_{zz} = \overrightarrow{T(P, \vec{z})} \cdot \vec{z} \end{array} \right\}$$

1.3 Tenseur des contraintes :

Toute partie d'un système en équilibre est supposée elle-même en équilibre, sous l'effet du vecteur contrainte appliqué sur sa frontière et d'une éventuelle force de volume \vec{f}

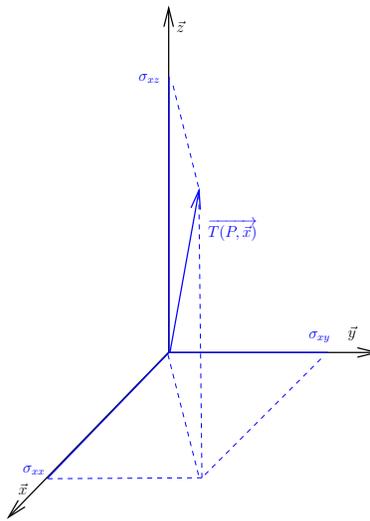


FIGURE 1 – Projections de $\vec{T}(P, \vec{x})$

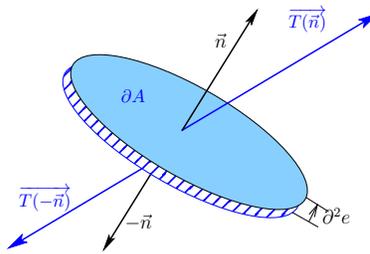


FIGURE 2 – symétrie de la contrainte

1.3.1 Symétrie des contraintes

Si on isole une partie infinitésimale autour d'un point dont une dimension est infiniment petite devant les deux autres. On peut prendre par exemple une forme de pièce de monnaie (pennyshape) d'aire ∂A d'épaisseur $\partial^2 e$ et de normale \vec{n} (figure 2).

Si on fait tendre l'épaisseur $\partial^2 e$ vers 0, on peut négliger la participation de la contrainte qui s'exerce sur la tranche dans l'équilibre et on obtient :

$$T(P, \vec{n})\partial A + T(P, -\vec{n})\partial A + \vec{f}\partial A\partial e = \vec{0} \text{ comme } \partial e \ll 1 \text{ on peut négliger les forces de volume et on peut écrire :}$$

$$\boxed{\vec{T}(P, -\vec{n}) = -\vec{T}(P, \vec{n})}$$

1.3.2 Linéarité de la contrainte :

On souhaite démontrer que la contrainte en un point P est linéaire par rapport à la normale au plane de coupure, c'est à dire :

$$\vec{T}(P, \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z}) = \alpha\vec{T}(P, \vec{x}) + \beta\vec{T}(P, \vec{y}) + \gamma\vec{T}(P, \vec{z})$$

On isole un élément de volume pyramidal autour du point P (figure 3).

L'élément de volume est en équilibre :

$$T(P, \vec{n})\partial A + T(P, -\vec{x})\partial A_x + T(P, -\vec{y})\partial A_y + T(P, -\vec{z})\partial A_z$$

et pour une normale $\vec{n} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z}$, on a : $\partial A_x = \alpha\partial A$, $\partial A_y = \beta\partial A$, $\partial A_z = \gamma\partial A$

On obtient donc :

$$\partial A \vec{T}(P, \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z}) + \alpha\partial A T(P, -\vec{x}) + \beta\partial A T(P, -\vec{y}) + \gamma\partial A T(P, -\vec{z}) = 0$$

ce qui démontre :

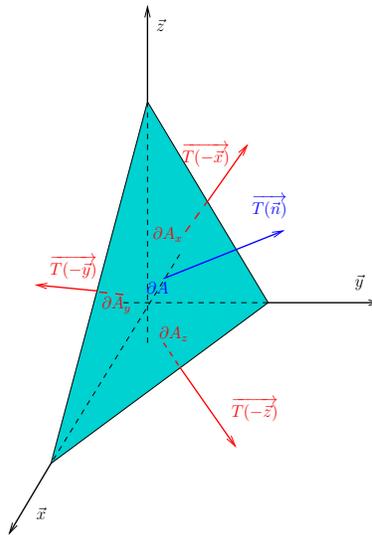


FIGURE 3 – Linéarité de la contrainte

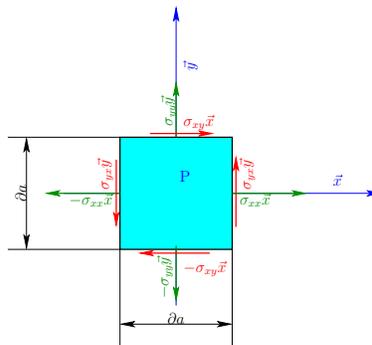


FIGURE 4 – Symétrie du tenseur des contraintes

$$\overrightarrow{T(P, \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z})} = \alpha\overrightarrow{T(P, \vec{x})} + \beta\overrightarrow{T(P, \vec{y})} + \gamma\overrightarrow{T(P, \vec{z})}$$

1.3.3 Tenseur des contraintes

Soit $\overline{\sigma_P}$, l'application définie au point P qui à une normale \vec{n} associe le vecteur des contraintes $\overrightarrow{T(P, \vec{n})}$ on vient de démontrer que c'est une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 , ce qui permet de la représenter par une matrice.

$$\overrightarrow{T(P, \vec{n})} = \overline{\sigma_P}(\vec{n})$$

$\overline{\sigma_P}$ peut s'écrire dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\overline{\sigma_P} : \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

1.3.4 Symétrie du tenseur des contraintes

On montre que $\overline{\sigma_P}$ est symétrique ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), prenons par exemple un élément de volume Ω cubique (ou carré en 2D) de dimensions infinitésimales Δa . Cet élément est sollicité par la contrainte exercée sur chacune de ses faces.

- Pour la face de normale \vec{x} : $T(P, \vec{x}) = \sigma_{xx}\vec{x} + \sigma_{yx}\vec{y}$
- Pour la face de normale \vec{y} : $T(P, \vec{y}) = \sigma_{xy}\vec{x} + \sigma_{yy}\vec{y}$
- Pour la face de normale $-\vec{x}$: $T(P, -\vec{x}) = -\sigma_{xx}\vec{x} - \sigma_{yx}\vec{y}$
- Pour la face de normale $-\vec{y}$: $T(P, -\vec{y}) = -\sigma_{xy}\vec{x} - \sigma_{yy}\vec{y}$

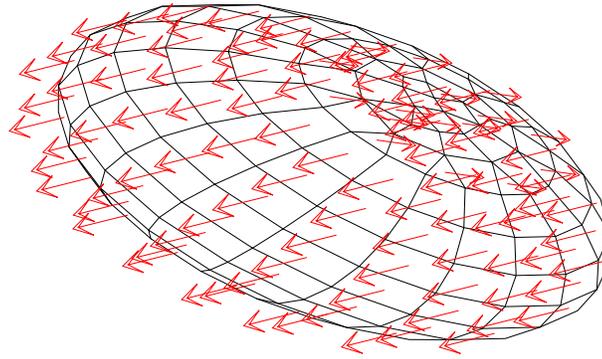


FIGURE 5 – Exemple de représentation du vecteur contrainte sur un élément de volume

Si on écrit l'équilibre en moment, on obtient :

$$\frac{\partial a}{2} \vec{x} \wedge \sigma_{yx} \partial a y + \frac{\partial a}{2} \vec{y} \wedge \sigma_{xy} \partial a \vec{x} - \frac{\partial a}{2} \vec{x} \wedge -\sigma_{yx} \partial a y - \frac{\partial a}{2} \vec{y} \wedge -\sigma_{xy} \partial a \vec{x} = 0$$

soit :

$$\frac{\partial a^2}{2} \sigma_{yx} - \frac{\partial a^2}{2} \sigma_{xy} + \frac{\partial a^2}{2} \sigma_{yx} - \frac{\partial a^2}{2} \sigma_{xy} = 0$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

Ce qui démontre que la matrice $\overline{\overline{\sigma_P}}$ est symétrique, elle est donc diagonalisable. Les valeurs propres de $\overline{\overline{\sigma_P}}$ sont les contraintes principales, les vecteurs propres forment le repère principal des contraintes.

1.4 Équations d'équilibre :

Si on isole un élément de volume Ω quelconque autour d'un point P , on peut dire que Ω est en équilibre sous l'action des contraintes exercées sur sa frontière que nous appellerons $\partial\Omega$ et sous l'actions d'éventuelles actions volumiques \vec{f} . On a représenté sur la figure 5 un exemple de représentation du vecteur contrainte appliqué sur la frontière d'un élément de volume, ici une ellipsoïde. Pour que l'ellipsoïde soit en équilibre, il faut que la somme des contraintes appliquées sur sa frontière et des forces de volumes soit nulle.

On obtient donc $\iint_{\partial\Omega} T(P, \vec{n}) dS + \iiint_{\Omega} \vec{f} dV = \vec{0}$ ce qui peut également s'écrire $\iint_{\partial\Omega} \overline{\overline{\sigma_P}} \vec{n} dS + \iiint_{\Omega} \vec{f} dV = \vec{0}$ ou

$$\oint_{\partial\Omega} \overline{\overline{\sigma_P}} d\vec{S} + \iiint_{\Omega} \vec{f} dV = \vec{0}$$

Le théorème de la divergence ou théorème de Green-Ostrogradski ¹ affirme l'égalité entre l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel avec le flux de ce champ au travers de la surface, ce qui se traduit par :

$$\oint_{\partial\Omega} \overline{\overline{\sigma_P}} d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \overrightarrow{div \overline{\overline{\sigma_P}}} dV$$

On a donc

$$\iiint_{\Omega} \overrightarrow{div \overline{\overline{\sigma_P}}} + \vec{f} dV = \vec{0}, \quad \forall \Omega$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{div \overline{\overline{\sigma_P}}} + \vec{f} dV = \vec{0}$$

2 Cercle de Mohr (2D)

Soient σ_I et σ_{II} ($\sigma_I \geq \sigma_{II}$) les contraintes principales, \vec{X}_I et \vec{X}_{II} les vecteurs propres associés, alors pour toute orientation de facette $\vec{n} = \cos \alpha \vec{X}_I + \sin \alpha \vec{X}_{II}$ la contrainte normale σ_n et la contrainte tangentielle τ_n se trouvent sur un cercle appelé cercle de Mohr.

1. Ostrogradski, « Proof of a theorem in Integral Calculus ». article présenté à l'académie des sciences de Paris le 13 février 1826

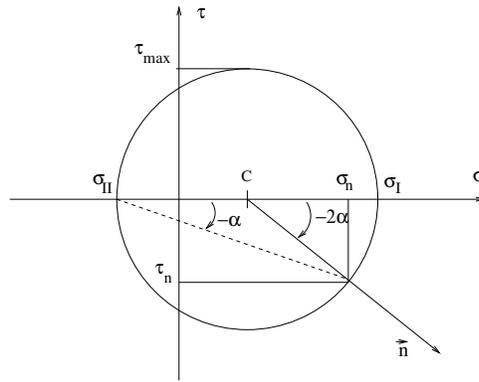


FIGURE 6 – Cercle de Mohr

— Le centre du cercle C est situé sur l'axe des contraintes normales σ à l'abscisse

$$\sigma_c = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} = \frac{Tr(\bar{\sigma})}{2}$$

— On peut tracer le cercle si on connaît un point quelconque du cercle, c'est à dire la contrainte normale et la contrainte tangentielle pour une normale particulière.

— La contrainte tangentielle maximale est

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$$

— Les angles partant du centre du cercle de Mohr sont égaux aux angles réels multipliés par -2 .

Exercice :

On donne :

$$\bar{\sigma} \left[\begin{array}{cc} \sigma & \tau \\ \tau & 0 \end{array} \right]_{(\vec{x}, \vec{y})}$$

avec $\sigma = -3MPa$ et $\tau = 2MPa$

1. Tracer le cercle de Mohr
2. Calculer les contraintes principales et indiquer les orientation des directions principales de la contrainte.
3. Calculer la valeur de la contrainte de cisaillement maximale et l'orientation de la facette correspondante.
4. Trouver la contrainte normale et la contrainte tangentielle pour une facette orientée par le vecteur $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$

Résolution :

1. Le centre du cercle est à un point d'abscisse $\sigma_c = \frac{Tr(\sigma)}{2} = -1,5MPa$
 Pour une facette orientée par le vecteur \vec{y} on a : $\sigma_y = 0$ et $\tau_y = -\tau$
 On peut donc tracer le cercle :
2. Le rayon du cercle est $R = \sqrt{\sigma_c^2 + \tau^2} = 2,5MPa$ et $\sigma_I = \sigma_c + R = 1MPa$, $\sigma_{II} = \sigma_c - R = -4MPa$
 Sur le cercle de Mohr, l'angle entre \vec{x} et \vec{X}_{II} est $\Theta_x = \arctan \frac{-2\tau}{\sigma} = \arctan \frac{4}{3} = 53,13^\circ$
 L'angle entre \vec{x} et \vec{X}_{II} est dans la réalité : $\alpha_x = -\frac{\Theta_x}{2} = -26,56^\circ$
3. La contrainte de cisaillement maximale est $\tau_{max} = R = 2,5MPa$, elle est obtenue pour une facette orientée par le vecteur \vec{u} tel que l'angle entre \vec{u} et \vec{x} soit Θ sur le cercle de Mohr avec $\Theta + \Theta_x = 90^\circ$ soit $\Theta = 53,13^\circ$
 l'angle entre \vec{u} et \vec{x} est dans la réalité : $\alpha = -\frac{\Theta}{2} = -36,87^\circ$
4. L'angle entre \vec{x} et \vec{n} est dans la réalité : $\alpha_n = \Pi/6$, sur le cercle de Mohr, on a $\Theta_n = -2\alpha_n = -\Pi/3$.
 Si on pose : $\Theta_2 = \Pi - \Pi/3 - \Theta_x = 180 - 60 - 53,13^\circ = 66,87^\circ$, on a : $\sigma_n = \sigma_c + R \cos \Theta_2 = -0,518MPa$ et $\tau_n = R \sin \Theta_2 = 2.299MPa$

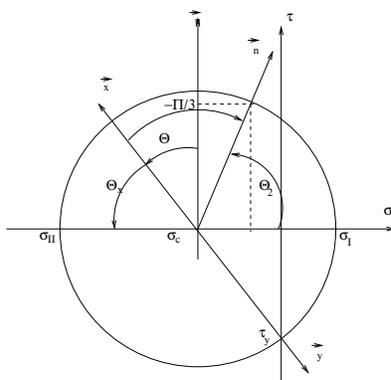


FIGURE 7 – Cercle de Mohr

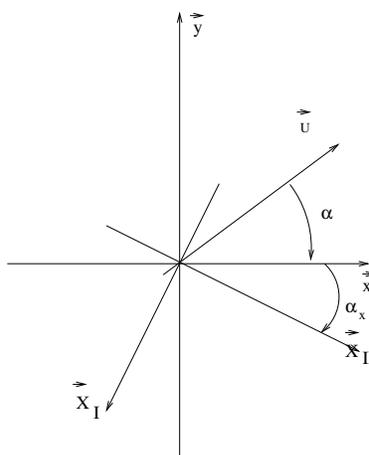


FIGURE 8 – Directions