

Introduction aux Éléments Finis

Christian La Borderie

ISABTP 4 / Master 1 / ISABTP 5 RID

Année 2023-2024

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	Énoncé d'un problème de mécanique :	4
1.2	Problème discrétisé :	4
1.3	Approche euristique de la méthode : Exemple d'une barre soumise à un effort	5
1.3.1	Solution analytique :	5
1.3.2	Discrétisation du problème	6
1.3.3	Mise en forme du problème :	8
1.3.4	Résolution du problème discrétisé :	9
1.3.5	Solution du problème discrétisé :	9
1.3.6	Calcul des déformations :	10
1.3.7	Évaluation de la solution :	10
1.4	Barre soumise à son poids propre :	10
1.4.1	Solution analytique :	11
1.4.2	Solution du problème discrétisé :	11
1.4.3	Calcul des déformations :	12
1.4.4	Évaluation de la solution :	13
1.5	Barre soumise à un flux convectif :	15
1.5.1	Solution analytique :	15
1.5.2	Solution du problème discrétisé :	15
2	La méthode des éléments finis en mécanique :	18
2.1	Introduction :	18
2.1.1	Notations :	18
2.1.2	Hypothèses prises dans la suite du chapitre	19
2.1.3	Convention de l'indice répété	19
2.1.4	Champ de déplacement cinématiquement admissible	19
2.1.5	Énoncé du théorème de l'énergie potentielle :	19
2.2	Méthode de Ritz-Galerkin :	19
2.2.1	Théorème de l'énergie potentielle :	20
2.2.2	Discrétisation, fonctions de base :	20
2.2.3	Réécriture du problème :	20
2.2.4	Écriture matricielle :	21
2.3	Calcul pratique de la matrice de rigidité et du vecteur des efforts :	22
2.3.1	Matrice des fonctions de forme et sa dérivée :	22

2.3.2	Matrice de rigidité :	23
2.3.3	Vecteur des efforts :	23
2.3.4	Méthode d'assemblage :	23
3	Éléments massifs :	25
3.1	Éléments triangulaires à trois nœuds (TRI3).	25
3.1.1	Matrice des fonctions de forme :	25
3.1.2	Calcul des déformations :	27
3.1.3	Calcul des contraintes :	28
3.1.3.1	Cas des déformations planes :	28
3.1.3.2	Cas des contraintes planes :	28
3.2	Calculs axisymétriques :	29
3.2.1	Déplacements :	29
3.2.2	Calcul des déformations :	29
3.2.3	Calcul des contraintes :	30
3.3	Éléments quadrilatères à 4 nœuds (QUA4) :	31
3.3.1	Fonctions de forme dans l'espace unitaire :	32
3.3.2	Expression de la transformation \mathcal{T} :	33
3.3.3	Calcul des déformations :	33
3.4	Éléments isoparamétriques, quelques exemples supplémentaires :	34
4	Éléments de flexion de type poutre :	35
4.1	Position du problème :	35
4.2	Détermination des fonctions de forme :	36
4.3	Calcul de la déformation :	36
4.4	Matrice de rigidité élémentaire :	37
4.5	Vecteur des efforts généralisés :	37
4.6	Exercice :	37
4.6.1	Discrétisation :	37
4.6.2	Conditions aux limites :	37
4.6.3	Assemblage de la matrice de rigidité et du vecteur des efforts :	37
5	Exemples :	41
5.1	Problème de mécanique, plaque trouée.	41
5.1.1	Problème posé :	41
5.1.2	Solution approchée du problème :	41
5.1.3	Choix de l'échelle de modélisation, hypothèses de calcul :	43
5.1.4	Première solution aux éléments finis :	43
5.1.4.1	Génération du maillage.	43
5.1.4.2	Modèle de résolution et caractéristiques :	45
5.1.4.3	Conditions aux limites :	45
5.1.4.4	Résolution du problème :	46
5.1.4.5	Post traitement des résultats :	46
5.1.4.6	Evaluation de la solution :	46
5.1.5	Conclusion :	47

6 Rappels sur les calculs thermiques :	49
6.1 Introduction :	49
6.1.1 Notations :	49
6.1.2 Comportement thermique des matériaux, loi de Fourier [5].	49
6.1.3 Conditions aux limites :	50
6.1.4 Bilan thermique : équation de la chaleur.	52

Chapitre 1

Introduction

1.1 Énoncé d'un problème de mécanique :

Le problème consiste en général à déterminer l'état d'une structure soumise à des sollicitations.

La structure est caractérisée par :

- Sa géométrie.
- Un ou plusieurs matériaux.

Elle est soumise à des sollicitations :

- Des efforts volumiques ou surfaciques.
- Des déplacements imposés (nuls ou non).
- Des températures, des flux de chaleur,
- Des vitesses,

On souhaite connaître :

- Les déplacements en tout point
- Les déformations, les contraintes, les variables internes en tout point.
- La température
- Les fréquences propres.
-

1.2 Problème discrétisé :

La résolution analytique des problèmes ne peut se faire que dans un nombre de cas limité (poutres, plaques, coques ...) et généralement sous de fortes hypothèses.

On peut simplifier les équations du problème en le discrétisant c'est à dire en vérifiant des équations en un nombre limité de points. On obtient alors un système d'équations linéaires dont la taille dépend de la finesse de la discrétisation.

La solution du problème discrétisé est une solution approchée du problème réel.

Les méthodes généralement utilisées sont :

- La méthode des différences finies.
- La méthode des équations intégrales aux frontières.
- La méthode des éléments finis.

Les méthodes numériques sont très utilisées dans le domaine de la mécanique mais ont un champ d'application très vaste

1.3 Approche euristique de la méthode : Exemple d'une barre soumise à un effort

Le fichier de données Cast3M de ce problème est disponible sur ce lien : <http://clb.perso.univ-pau.fr/rdm/isa5/traction1D1.dgibi>

1.3.1 Solution analytique :

Soit une barre $[AB]$ encastée en A et soumise à un effort F en B représentée sur la figure 1.1.

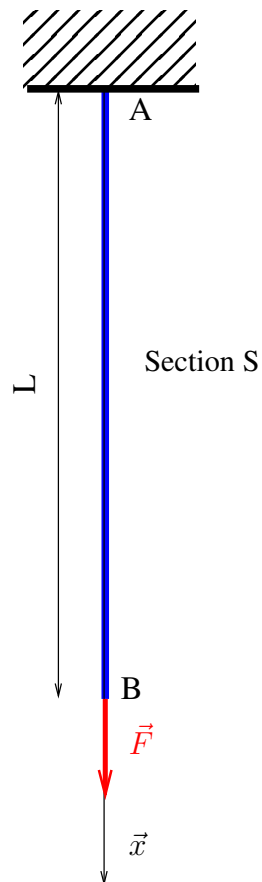


FIGURE 1.1: Barre en traction simple

Mise en forme (.. ules.) du problème :

Le champ de déplacement $U(x)$ du problème doit être cinématiquement admissible :

C'est un champ suffisamment régulier vérifiant les conditions aux limites du problème.

$$\text{Ici : } U(0) = 0.$$

Le champ de contrainte solution $\sigma(x)$ doit être statiquement admissible :

C'est un champ suffisamment régulier vérifiant les équations d'équilibre et les conditions aux limites :

$$\text{Ici : } \operatorname{div}(\sigma) = \frac{d\sigma}{dx} = 0 \text{ et } \sigma(L) = \frac{F}{S}.$$

La loi de comportement doit être vérifiée.

$$\sigma = E\varepsilon \text{ avec } \varepsilon = \frac{dU}{dx}$$

La solution du problème est donnée par le champ de déplacements :

$$U(x) = \frac{F}{ES}x + U(0)$$

1.3.2 Discrétisation du problème

La structure est séparée en *morceaux* appelés éléments, le résultat se nomme maillage.

Lors de la discrétisation on voit apparaître des points particuliers situés aux intersections des éléments nommés nœuds (Figure 1.2).

La solution du problème discrétisé est donnée par la valeur de la fonction u_n aux n nœuds du maillage. La variation de la fonction u_n entre deux nœuds a une *forme* déterminée à l'avance.

Le déplacement solution du problème discrétisé u_n de tout point d'un élément est déduit des déplacements aux nœuds situés aux extrémités de l'élément et de son abscisse x dans le repère de l'élément.

$$u_n(x) = \psi_i(x) u_i + \psi_j(x) u_j$$

où u_i et u_j désignent les déplacements des nœuds i et j , ψ_i et ψ_j des fonctions d'interpolations (ou fonctions de forme) décrites plus loin.

Les fonctions ψ_i sont généralement des fonctions polynomiales des coordonnées et éventuellement de leurs dérivées. On obtient un interpolation linéaire des déplacements dans l'élément en prenant $\psi_i(x) = 1 - \frac{x}{l}$ et $\psi_j(x) = \frac{x}{l}$:

$$u_n(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_i + \frac{x}{l} u_j$$

Le déplacement du problème discrétisé est entièrement déterminé à partir des déplacements aux nœuds et peut être représenté sur la figure suivante.

On peut aussi écrire l'évolution des fonctions d'interpolations en fonction de la coordonnée réduite $\xi = \frac{2x-l}{l}$. De cette manière on utilise la même expression pour toutes les fonctions d'interpolation du maillage même si les éléments ne sont pas tous de longueurs identiques, de plus, le fait que ξ varie entre -1 et 1 nous donnera par la suite certaines propriétés .

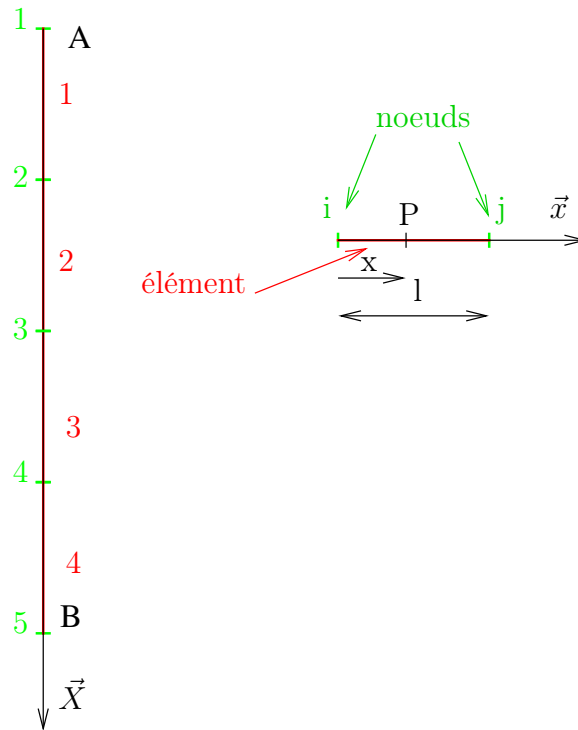


FIGURE 1.2: Discrétisation en nœuds et éléments

Le choix de formes polynomiales pour les fonctions d'interpolation et les conditions $u_n(-1) = u_i$ et $u_n(1) = u_j$ permet de les déterminer de façon unique :

$$\begin{aligned} \psi_i(-1) &= 1, & \psi_i(1) &= 0, & \psi_j(-1) &= 0, & \psi_j(1) &= 1 \\ \psi_i(\xi) &= \frac{1-\xi}{2}, & \psi_j(\xi) &= \frac{1+\xi}{2} \end{aligned}$$

On peut alors écrire en posant $\mathbf{U}_e : \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$ le vecteur des déplacements nodaux et $\mathbf{N}(\xi) : [\psi_i(\xi) \quad \psi_j(\xi)]$ la matrice des fonctions de forme :

$$u_n(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{U}_e$$

La déformation en tout point de l'élément peut alors être déduite :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\xi) &= \frac{du_n}{dx} = \frac{2}{l} \frac{du_n}{d\xi} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{U}_e \\ \mathbf{B}(\xi) &= \frac{d\mathbf{N}(\xi)}{dx}, \quad \varepsilon(\xi) = \mathbf{B}(\xi) \mathbf{U}_e \end{aligned}$$

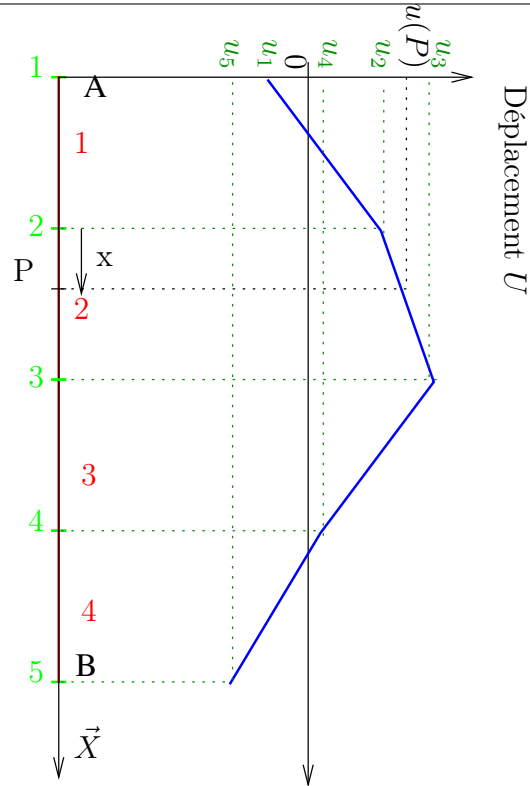


FIGURE 1.3: Champ de déplacement du problème discrétisé

1.3.3 Mise en forme du problème :

On associe aux déplacements nodaux u_i et u_j , les forces nodales f_{ij} et f_{ji} par l'intermédiaire de la matrice de rigidité élémentaire \mathbf{K}_e .

$$\begin{cases} f_{ij} = \frac{ES}{l} (u_i - u_j) \\ f_{ji} = \frac{ES}{l} (u_j - u_i) \end{cases}$$

soit :

$$\mathbf{K}_e = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

en posant

$$\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} f_{ij} \\ f_{ji} \end{bmatrix}$$

nous obtenons :

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{U}_e$$

Remarquons que f_i et f_j sont les actions exercées sur l'élément aux nœuds i et j , nous pouvons les relier à l'effort normal N donc : $N(0) = -f_i$ et $N(l) = f_j$

1.3.4 Résolution du problème discrétisé :

La solution du problème est donnée par la matrice de rigidité (qui dépend que de la géométrie de la structure et de sa discrétisation) et les conditions aux limites (qui interviennent dans les vecteurs des efforts nodaux et des déplacements nodaux)

$$\begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{21} \\ f_{34} \\ f_{43} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_{23} \\ f_{32} \\ f_{45} \\ F \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

en notant f_i^e : action du nœud i sur l'élémente

L'équilibre de chacun des nœuds permet d'écrire :

$$f_{21} + f_{23} = 0, f_{32} + f_{34} = 0, f_{43} + f_{45} = 0$$

Au total on peut présenter le problème *assemblé* :

$$\begin{bmatrix} f_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} \quad \text{avec } l = \frac{L}{4}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U}$$

Où \mathbf{F} est le vecteur des effort, \mathbf{U} le vecteur des déplacements et \mathbf{K} la matrice de rigidité.

Le système peut être résolu numériquement de façon aisée car la matrice \mathbf{K} possède de bonnes propriétés :

Elle est symétrique, sa structure est de type bande, ce qui permet un stockage limité de termes.

1.3.5 Solution du problème discrétisé :

$$\begin{bmatrix} f_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} = \frac{4ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} f_{12} = -\frac{4ES}{L}u_2 \Rightarrow u_2 = -\frac{L}{4ES}f_{12} \\ 0 = \frac{4ES}{L}(2u_2 - u_3) \Rightarrow u_3 = 2u_2 \\ 0 = \frac{4ES}{L}(-u_2 + 2u_3 - u_4) \Rightarrow u_4 = -u_2 + 2u_3 = 3u_2 \\ 0 = \frac{4ES}{L}(-u_3 + 2u_4 - u_5) \Rightarrow u_5 = -u_3 + 2u_4 = 4u_2 \\ F = \frac{4ES}{L}(-u_4 + u_5) \Rightarrow u_2 = \frac{FL}{4ES} \end{cases}$$

1.3.6 Calcul des déformations :

La déformation dans l'élément 1 est : $\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{F}{ES}$. La déformation dans les autres éléments est identique.

1.3.7 Évaluation de la solution :

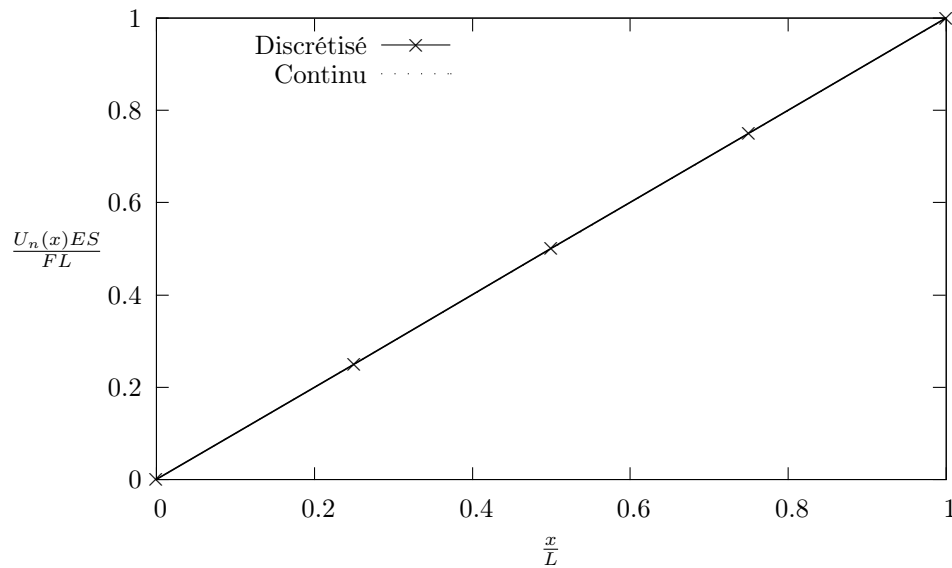


FIGURE 1.4: Déplacement dans la barre

La solution en déplacement est exacte en tout point de la structure (aux nœuds et en tout point des éléments) par conséquent les solutions en déformation et en contraintes sont aussi exactes. Ceci vient du fait que les fonctions d'interpolation sont du même ordre que la solution analytique. La solution aurait aussi été exacte avec un seul élément. On remarquera que le champ de contrainte obtenu : $\sigma = \frac{F}{S}$ est statiquement admissible.

La solution en déplacement est cinématiquement admissible, la solution en contrainte est statiquement admissible, la loi de comportement est vérifiée ; la solution du problème discrétisé est donc la même que celle du problème continu.

1.4 Barre soumise à son poids propre :

La structure précédemment étudiée est maintenant sollicitée par son poids propre.

Le fichier de données Cast3M de ce problème est disponible sur ce lien : <http://clb.perso.univ-pau.fr/rdm/isa5/traction1D2.dgibi>.

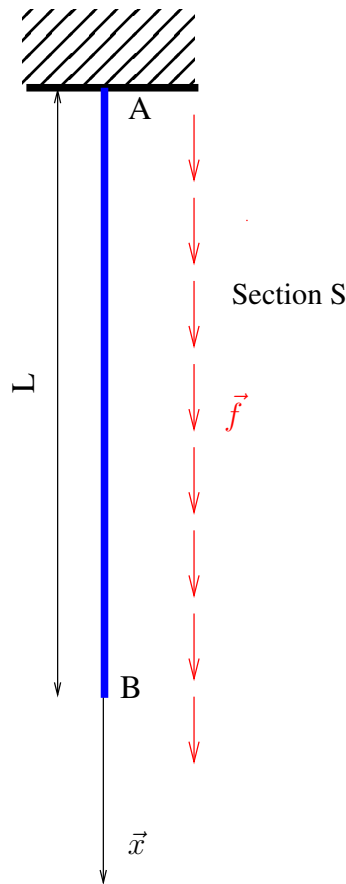


FIGURE 1.5: Barre soumise à une charge répartie

1.4.1 Solution analytique :

On note ρ la masse volumique du matériau constituant la barre et g l'accélération de la pesanteur.

Le champ de contrainte statiquement admissible vérifie : $\frac{d\sigma}{dx} + \rho g = 0$ et $\sigma(L) = 0$

Ce qui donne : $\sigma = -\rho g (X - L)$

D'autre part nous avons : $\sigma = E\varepsilon$, $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ et $u(0) = 0$.

Le champ de déplacement solution du problème continu est donc :

$$u(X) = \frac{\rho g}{E} \left(LX - \frac{X^2}{2} \right)$$

1.4.2 Solution du problème discrétisé :

On utilise la discrétisation du problème précédent (donnée en 1-1-2), nous avons donc la même matrice de rigidité.

Il s'agit donc de déterminer le vecteur des efforts correspondant à notre problème.

La masse de l'élément est reportée aux nœuds et on obtient l'approximation suivante :

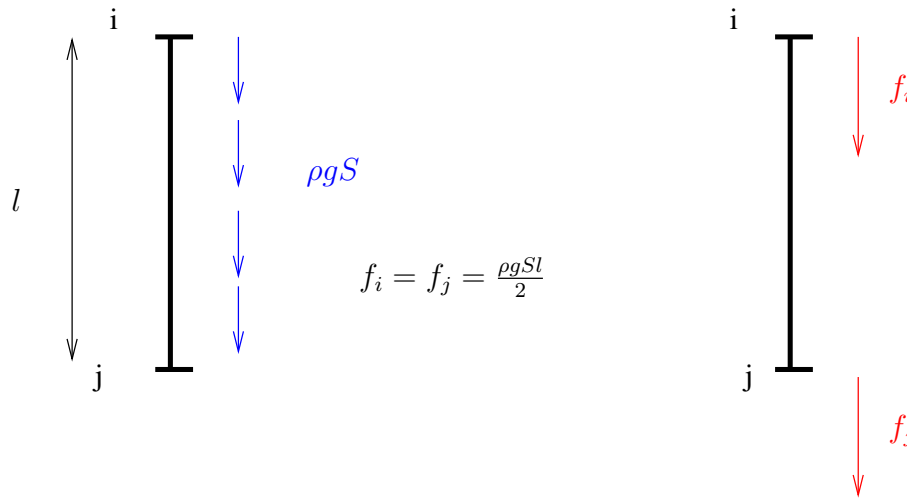


FIGURE 1.6: Forces équivalentes aux nœuds

Le vecteur élémentaire des efforts nodaux est donc $\mathbf{F}_e^T = \rho g l S \left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right]$.

En assemblant le vecteur des effort nodaux on obtient : $\mathbf{F}^T = \rho g l S \left[\frac{1}{2} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \right]$.

Le champ u_n solution du problème discrétisé est solution du système d'équations :

$$\begin{bmatrix} f_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho g L S}{4} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{4 E S}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

La résolution du système peut se faire de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_2 = -\frac{L}{4ES} \left(f_1^1 + \frac{\rho g L S}{8} \right) = -\frac{L}{4ES} f_1^1 - \frac{\rho g L^2}{32E} \\ u_3 = 2u_2 - \frac{\rho g L^2}{16E} \\ u_4 = 3u_2 - \frac{3\rho g L^2}{16E} \\ u_5 = 4u_2 - \frac{6\rho g L^2}{16E} \\ u_5 = u_4 + \frac{\rho g L^2}{32E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = \frac{7\rho g L^2}{32E} \\ u_3 = \frac{3\rho g L^2}{8E} \\ u_4 = \frac{15\rho g L^2}{32E} \\ u_5 = \frac{\rho g L^2}{2E} \\ f_1^1 = -\rho g L S \end{cases}$$

1.4.3 Calcul des déformations :

Les déformations sont obtenues à partir de la matrice \mathbf{B} et du champ de déplacement u_n .

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{l} (u_2 - u_1) = \frac{28\rho g L}{32E}, \varepsilon_2 = \frac{20\rho g L}{32E}, \varepsilon_3 = \frac{12\rho g L}{32E}, \varepsilon_4 = \frac{4\rho g L}{32E}$$

1.4.4 Évaluation de la solution :

La solution en déplacement est exacte aux nœuds mais le degré de l'interpolation est insuffisant pour représenter correctement le champ de déplacement dans les éléments (figure 1.7).

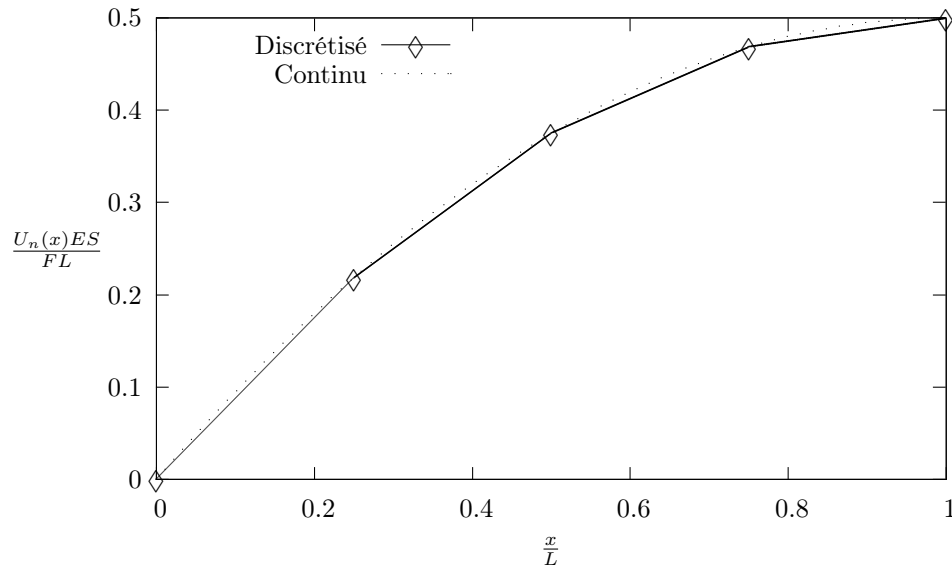


FIGURE 1.7: Solution en déplacement

Les champs de déformation et de contrainte sont par conséquent inexacts puisque l'approximation donne des champs constants par élément alors que la solution du problème continu est linéaire (figure 1.8).

Le champ de contrainte solution du problème n'est pas statiquement admissible :

- Les conditions aux limites ne sont pas exactement respectées en $X = L$.
- Le champ n'est pas continu.

La solution du problème discrétisé dépend de la taille des mailles (ou éléments), plus la taille des mailles diminue, plus la solution du problème discrétisé est proche de la solution du problème continu.

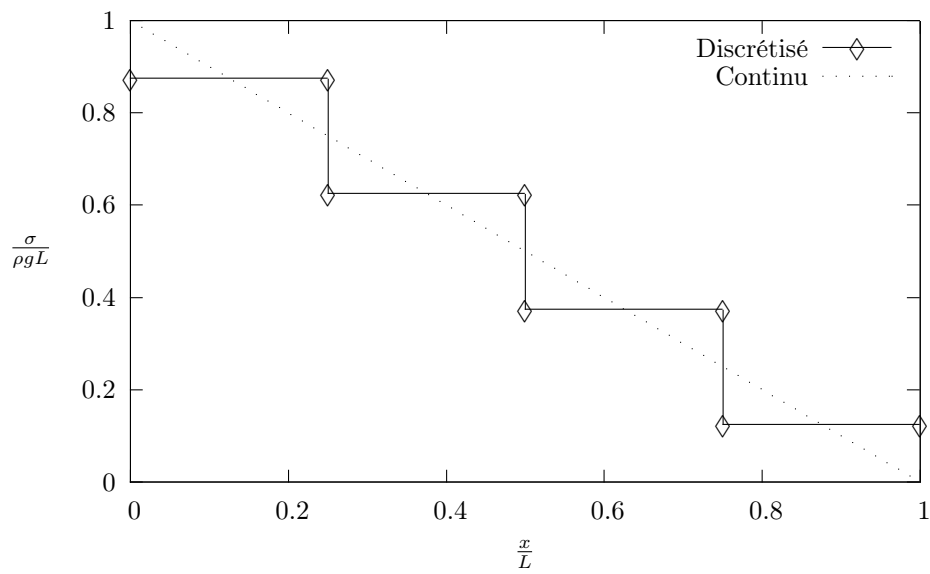


FIGURE 1.8: Contrainte dans la barre

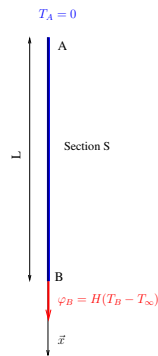


FIGURE 1.9: Barre soumise à un flux convectif

1.5 Barre soumise à un flux convectif :

La discrétisation d'un problème de thermique se fait de la même manière que pour un problème de mécanique. L'inconnue principale du problème est alors la température T .

Soit une barre $[AB]$ de longueur L et de section S soumise à une température $T_A = 0$ A un flux convectif $\varphi_B = H(T_B - T_\infty)$ en B .

1.5.1 Solution analytique :

- Le champ de température $T(x)$ est cinématiquement admissible (C.A.) :
 - $T(x)$ est de classe C1 en x
 - $T(0) = 0$
- Le comportement est vérifié :
 - $Q = -\lambda S \frac{dT}{dx}$
- Le flux thermique $Q(x)$ est statiquement admissible (S.A.)
 - $\frac{dQ}{dx} = 0$ et $Q(L) = \varphi_B = H(T_B - T_\infty)$
 - $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$

donc

- $\frac{\partial T}{\partial x} = cste$, or $-\lambda S \frac{dT}{dx}(L) = \varphi_b \implies \frac{dT}{dx} = -\frac{\varphi_b}{\lambda S}$
- $T(x) = -\frac{\varphi_b}{\lambda S} x + Cste$ et $T(0) = T_A = 0$
- $T_B = -\frac{H(T_B - T_\infty)}{\lambda S} L$

$$T_B = \frac{HLT_\infty}{\lambda S + HL}, \quad \varphi_B = -\frac{\lambda S}{\lambda S + HL} HT_\infty, \quad T(x) = \frac{HLT_\infty}{\lambda S + HL} \frac{x}{L}$$

1.5.2 Solution du problème discrétisé :

Discrétisation On utilise des fonctions de forme identiques à celles de la mécanique.

- $T_n(x) = \psi_i(\xi)T_i + \psi_j(\xi)U_j$
 - $\psi_i(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$ et $\psi_j(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$
 - Soit sous la forme matricielle :

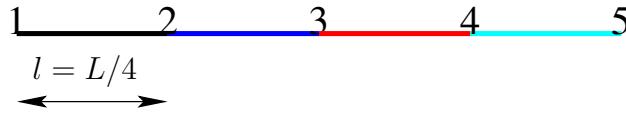


FIGURE 1.10: Problème thermique discrétisé

— $\mathbf{T}_e : \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix}$ le vecteur des déplacements nodaux

— $\mathbf{N}(\xi) : [\psi_i(\xi) \quad \psi_j(\xi)]$ la matrice des fonctions de forme

Le flux de chaleur est obtenu par dérivation :

— $Q(\xi) = -\lambda S \frac{dT(\xi)}{dx} = -\lambda S \frac{dT(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -\frac{\lambda S}{l} \frac{dT(\xi)}{d\xi}$

— $Q(\xi) = -\frac{2\lambda S}{l} \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix}$

— $Q(\xi) = -\frac{\lambda S}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix}$

— Soit $\mathbf{B}(\xi) = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{B}(\xi) = \frac{d\mathbf{N}(\xi)}{dx}, \quad q(\xi) = -\lambda S \mathbf{B}(\xi) \mathbf{T}_e$$

Equilibre d'un élément

— $Q_{ij} + Q_{ji} = 0$

— $\begin{cases} Q_{ij} = -\frac{\lambda S}{l} (T_i - T_j) \\ Q_{ji} = -\frac{\lambda S}{l} (T_j - T_i) \end{cases}$

— soient

— $\mathbf{K}_e = \frac{\lambda S}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice de conductivité élémentaire

— $\mathbf{Q}_e = \begin{bmatrix} Q_{ij} \\ Q_{ji} \end{bmatrix}$ le vecteur des efforts élémentaires

$$\mathbf{Q}_e = -\mathbf{K}_e \mathbf{T}_e$$

Équilibre du système

$$\begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{21} \end{bmatrix} = \frac{\lambda S}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ T_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_{23} \\ Q_{32} \end{bmatrix} = \frac{\lambda S}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{34} \\ Q_{43} \end{bmatrix} = \frac{\lambda S}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_{45} \\ H(T_5 - T_\infty) \end{bmatrix} = \frac{\lambda S}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{21} + Q_{23} \\ Q_{32} + Q_{34} \\ Q_{43} + Q_{45} \\ -HT_\infty \end{bmatrix} = -\frac{\lambda S}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} - H \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -HT_{\infty} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\lambda S}{l} & -\frac{\lambda S}{l} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda S}{l} & 2\frac{\lambda S}{l} & -\frac{\lambda S}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda S}{l} & 2\frac{\lambda S}{l} & -\frac{\lambda S}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2\frac{\lambda S}{l} & -\frac{\lambda S}{l} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda S}{l} & (\frac{\lambda S}{l} - H) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Q_{12} = \frac{4\lambda S}{L} T_2 \Rightarrow T_2 = \frac{L}{4\lambda S} Q_{12} \\ 0 = -\frac{4\lambda S}{L} (2T_2 - T_3) \Rightarrow T_3 = 2T_2 \\ 0 = -\frac{4\lambda S}{L} (-T_2 + 2T_3 - T_4) \Rightarrow T_4 = -T_2 + 2T_3 = 3T_2 \\ 0 = -\frac{4\lambda S}{L} (-T_3 + 2T_4 - T_5) \Rightarrow T_5 = -T_3 + 2T_4 = 4T_2 \\ -HT_{\infty} = -\frac{4\lambda S}{L} (-T_4 + T_5) - HT_5 \Rightarrow T_2 = \frac{HLL_{\infty}}{4(HL + \lambda S)} \end{cases}$$

$$T_1 = 0, \quad T_2 = \frac{HLL_{\infty}}{4(HL + \lambda S)}, \quad T_3 = \frac{HLL_{\infty}}{2(HL + \lambda S)}$$

$$T_4 = \frac{3HLL_{\infty}}{4(HL + \lambda S)}, \quad T_5 = \frac{HLL_{\infty}}{HL + \lambda S}$$

La solution éléments finis coïncide ici avec la solution analytique.

Chapitre 2

La méthode des éléments finis en mécanique :

2.1 Introduction :

2.1.1 Notations :

La structure (voir figure 2.1) sera notée Ω avant la déformation et Ω' après la déformation.

La frontière de Ω sera notée $\partial\Omega$.

Le déplacement \vec{U}_d est imposé sur la partie $\partial_1\Omega$ de $\partial\Omega$.

Les efforts surfaciques \vec{F}_d sont imposés sur la partie $\partial_2\Omega$ de $\partial\Omega$.

Les efforts volumiques \vec{f}_d sont imposés sur Ω

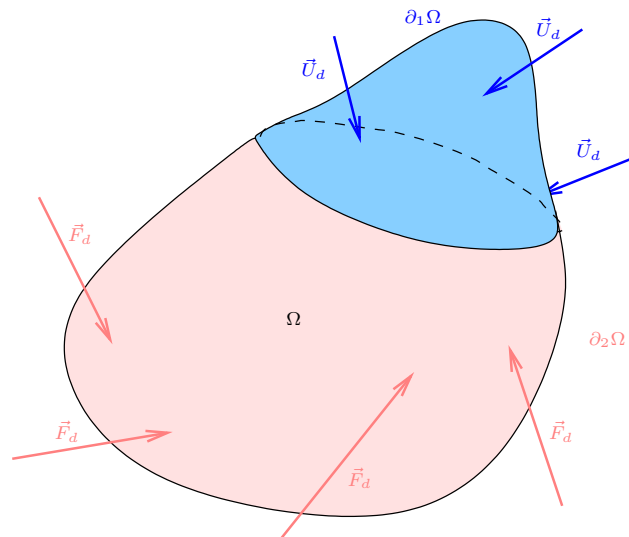


FIGURE 2.1: Structure étudiée

$$\begin{cases} \partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega \\ \partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset \end{cases}$$

On ne peut pas imposer en un même lieu un déplacement et un effort dans la même direction.

2.1.2 Hypothèses prises dans la suite du chapitre

Hypothèse des petits déplacements : $\Omega' \approx \Omega$

Les phénomènes thermiques ainsi que les quantités d'accélération seront négligés.

Remarque : Ces hypothèses sont prises afin de faciliter la présentation du cours, la méthode permet de traiter des problèmes en grands déplacements et des problèmes thermiques.

2.1.3 Convention de l'indice répété

Dans la suite du cours, et pour alléger les notations nous allons utiliser une partie des conventions habituellement appelées "notations d'Einstein". Il s'agit de considérer une somme chaque fois qu'un indice est répété :

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^n a_i b_i \text{ ou } a_i C_{ij} b_j = \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^n C_{ij} b_j \right)$$

2.1.4 Champ de déplacement cinématiquement admissible

C'est un champ de déplacement défini sur la structure Ω vérifiant les conditions imposées sur $\partial_1\Omega$ et suffisamment régulier pour que la déformation puisse être calculée en tout point.

2.1.5 Énoncé du théorème de l'énergie potentielle :

Il existe un référentiel Galiléen et un chronologie tels que le champ de déplacement \vec{u} solution du problème posé minimise l'énergie potentielle Φ qui s'écrit compte tenu des hypothèses :

$$\Phi = c + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr(\sigma \varepsilon(\vec{u})) dv - \int_{\Omega} \vec{f}_a \vec{u} dv - \int_{\partial_1\Omega} \vec{F}_d \vec{u} ds$$

Où c désigne une constante.

2.2 Méthode de Ritz-Galerkin :

La méthode de Ritz-Galerkin consiste à rechercher une solution en déplacement sous la forme $\vec{u}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n X_i \vec{\varphi}_i(x, y, z)$ où :

- les X_i désignent les degrés de liberté dont les inconnues du problème.
- les $\vec{\varphi}_i(x, y, z)$ sont les fonctions de forme ou fonctions de base judicieusement choisies de façon à approcher au mieux la solution du problème.

2.2.1 Théorème de l'énergie potentielle :

Nous cherchons un champ de déplacement pour le problème discrétisé, si les fonctions de forme ne permettent pas d'obtenir la solution exacte, la solution du problème discrétisé ne vérifiera donc pas forcément exactement les équations d'équilibre, on utilise alors une écriture intégrée du premier principe de la thermodynamique : le théorème de l'énergie potentielle.

Le champ déplacement \vec{u} solution du problème vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u} \text{ cinématiquement admissible minimisant la fonctionnelle } \mathbf{J}(\vec{u}) \\ \vec{u} \mapsto \mathbf{J}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma : \varepsilon(\vec{u})) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{f}_d \cdot \vec{u} d\Omega - \int_{\partial_2 \Omega} \vec{F}_d \cdot \vec{u} dS \\ \sigma = \mathbf{C}\varepsilon(\vec{u}) \end{array} \right.$$

2.2.2 Discrétisation, fonctions de base :

Au lieu de chercher la solution du problème sur un ensemble infini de possibilités, nous restreignons l'espace de recherche à l'ensemble fini de fonctions définies par n degrés de liberté X_i , $i = 1 \dots n$ et des fonctions de base donnant le champ de déplacement en tout point de la structure en fonction des X_i .

On définit l'espace des champs de déplacements discrétisé par \mathcal{U}_n l'ensemble de champs de déplacements $\vec{u}(x, y, z)$ générés par les fonctions de base :

$$\forall \vec{u}(x, y, z) \in \mathcal{U}_n, \exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \vec{u}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n X_i \vec{\varphi}_i(x, y, z) \quad (2.1)$$

où :

- les X_i sont les inconnues du problème ou *degrés de liberté* et désignent les déplacements des nœuds du maillage.
- les $\vec{\varphi}_i$ désignent les fonctions de base ou fonctions de forme. Ces fonctions sont complètement déterminées par le choix de la discrétisation et sont considérées comme connues. Leur nombre est égal au nombre de degrés de liberté.

Le nombre de degrés de liberté et la complexité de fonctions de base conditionnent la dimension de l'espace de recherche \mathcal{U}_n et donc la qualité de la solution discrétisée.

2.2.3 Réécriture du problème :

La fonctionnelle \mathbf{J} est minimisée sur l'espace \mathcal{U}_n de dimension fini. (La solution du problème réel minimise la fonctionnelle sur un espace de dimension infini.).

La résolution du problème discrétisé est solution du problème suivant :

$$\text{Trouver } \mathbf{X} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \text{ rendant } \vec{u}_n = \sum_{i=1}^n X_i \vec{\varphi}_i = X_i \vec{\varphi}_i \text{ cinématiquement admissible et mini-}$$

misant la fonctionnelle $\mathbf{J}_1(\mathbf{X})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{X} \mapsto \mathbf{J}_1(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}(\varepsilon(\mathbf{X}_i \vec{\varphi}_i) \mathbf{C}\varepsilon(\mathbf{X}_i \vec{\varphi}_i)) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{f}_d \cdot \mathbf{X}_i \vec{\varphi}_i d\Omega - \int_{\partial_2 \Omega} \vec{F}_d \cdot \mathbf{X}_i \vec{\varphi}_i dS \end{array} \right.$$

Remarques :

La solution est unique pour une discrétisation donnée si l'ensemble des conditions limites empêche tout mouvement de solide.

La solution dépend à priori du choix de la discrétisation et plus l'espace U_n permettra de représenter la réalité (en général on peut dire plus la discrétisation sera fine), meilleure sera la solution.

2.2.4 Écriture matricielle :

Posons :

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr (\varepsilon (X_i \vec{\varphi}_i) C \varepsilon (X_j \vec{\varphi}_j)) d\Omega \\ \Pi &= \frac{1}{2} X_i \int_{\Omega} Tr (\varepsilon (\vec{\varphi}_i) C \varepsilon (\vec{\varphi}_j)) d\Omega \quad X_j \\ \Pi &= \frac{1}{2} X_i \mathbf{K}_{ij} X_j \text{ avec } \mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} Tr (\varepsilon (\vec{\varphi}_i) C \varepsilon (\vec{\varphi}_j)) d\Omega \\ \text{Soit sous forme matricielle : } \Pi &= \frac{1}{2} \mathbf{X}^t \mathbf{K} \mathbf{X}\end{aligned}$$

\mathbf{K} est la matrice de rigidité de la structure discrétisée, de par sa construction on peut affirmer que \mathbf{K} est symétrique.

Posons de même :

$$\begin{aligned}\Theta &= - \int_{\Omega} \vec{f}_d \cdot X_i \vec{\varphi}_i d\Omega - \int_{\partial_2 \Omega} \vec{F}_d \cdot X_i \vec{\varphi}_i dS \\ \Theta &= -X_i \left(\int_{\Omega} \vec{f}_d \vec{\varphi}_i d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \vec{F}_d \vec{\varphi}_i dS \right) \\ \Theta &= -X_i \mathbf{F}_i \text{ avec } \mathbf{F}_i = \int_{\Omega} \vec{f}_d \vec{\varphi}_i d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \vec{F}_d \vec{\varphi}_i dS \\ \text{Soit sous forme matricielle : } \Theta &= -\mathbf{X}^t \mathbf{F}\end{aligned}$$

Le problème peut alors s'écrire :

Trouver \mathbf{X} rendant $\vec{u} = x_i \vec{\varphi}_i$ cinématiquement admissible et minimisant la fonctionnelle $J_1(\mathbf{X})$:

$$\left| \begin{array}{l} R^n \rightarrow R \\ X \mapsto J_1(X) = \frac{1}{2} \mathbf{X}^t \mathbf{K} X - \mathbf{X}^t \mathbf{F} \end{array} \right.$$

Le minimum de la fonctionnelle J_1 correspond à un point de dérivée nulle.

$$\begin{aligned}dJ_1(\mathbf{X}) &= \frac{1}{2} d\mathbf{X}^t \mathbf{K} \mathbf{X} + \frac{1}{2} \mathbf{X}^t \mathbf{K} d\mathbf{X} - d\mathbf{X}^t \mathbf{F} \\ dJ_1(\mathbf{X}) &= d\mathbf{X}^t \mathbf{K} \mathbf{X} - d\mathbf{X}^t \mathbf{F} \text{ car } \mathbf{K} \text{ est symétrique} \\ dJ_1(\mathbf{X}) &= 0 \Rightarrow \mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{F}\end{aligned}$$

Finalement la solution du problème est solution de :

Trouver \mathbf{X} rendant $\vec{u} = X_i \vec{\varphi}_i$ cinématiquement admissible tel que

$$KX = F \tag{2.2}$$

avec

- \mathbf{K} est la matrice de rigidité.
- \mathbf{X} est le vecteur des degrés de liberté.
- \mathbf{F} est le vecteur des forces nodales.

2.3 Calcul pratique de la matrice de rigidité et du vecteur des efforts :

Plaçons nous pour simplifier la présentation dans un élément. On va premièrement définir la matrice de rigidité élémentaire puis la procédure d'assemblage.

2.3.1 Matrice des fonctions de forme et sa dérivée :

Le déplacement de tout point d'un élément est déduit de la coordonnée réduite ξ de ce point dans l'élément et des fonctions de forme (dans le cas de problèmes multidimensionnels, ξ est un vecteur)

$$U_n(\xi) = \sum_{i=1}^{n_1} x_i \varphi_i(\xi) \quad (2.3)$$

Où n_1 désigne le nombre de degrés de liberté par élément. Chaque nœud pouvant comporter plusieurs degrés de liberté (par exemple en mécanique bidimensionnelle : déplacements horizontaux et verticaux), le nombre de degrés de liberté dans l'élément correspond au nombre de nœuds multiplié par le nombre de degrés de liberté par nœud.

Si \mathbf{U}_e est le vecteur des déplacements nodaux et \mathbf{N} la matrice des fonctions de forme, on peut écrire :

$$U_n(\xi) = \mathbf{N}(\xi)U_e \quad (2.4)$$

avec :

$$\mathbf{N}(\xi) = [\varphi_1(\xi) \quad \varphi_2(\xi) \quad \dots \quad \dots \quad \varphi_{n_1}(\xi)] \text{ et } U_e = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n_1} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

La matrice $\mathbf{N}(\xi)$ est la matrice des fonctions de forme.

Dans le cas où on fait l'hypothèse que les déformations restent petites, la déformation en tout point de l'élément est calculée avec l'opérateur gradient ∇ .

$$\varepsilon(\xi) = \frac{1}{2} [\nabla (U_n(\xi)) + \nabla^t (U_n(\xi))] \quad (2.6)$$

L'opérateur ∇ fait intervenir les dérivées spatiales et on peut écrire :

$$\varepsilon(\xi) = \frac{1}{2} [\nabla (\mathbf{N}(\xi)U_e) + \nabla^t (\mathbf{N}(\xi)U_e)]$$

soit :

$$\varepsilon(\xi) = \frac{1}{2} [\nabla (\mathbf{N}(\xi)) + \nabla^t (\mathbf{N}(\xi))] U_e$$

ou

$$\varepsilon(\xi) = B(\xi)U_e \text{ avec } B(\xi) = \frac{1}{2} [\nabla(N(\xi)) + \nabla^t(N(\xi))] \quad (2.7)$$

La matrice $\mathbf{B}(\xi)$ est la matrice des dérivées spatiales des fonctions de forme.

2.3.2 Matrice de rigidité :

La matrice de rigidité élémentaire \mathbf{K}_e est définie par :

$$K_{eij} = \int_{\Omega_e} \text{Tr}(\varepsilon(\vec{\varphi}_i) \mathbf{C} \varepsilon(\vec{\varphi}_j)) d\Omega$$

ou

$$K_e = \int_{\Omega_e} B^t C B d\Omega \quad (2.8)$$

2.3.3 Vecteur des efforts

Le vecteur des efforts élémentaires \mathbf{F}_e est défini par :

$$F_{e_i} = \int_{\Omega} \vec{f}_d \vec{\varphi}_i d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \vec{F}_d \vec{\varphi}_i dS$$

Soit encore :

$$F_e = \int_{\Omega} f_d \mathbf{N} d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} F_d \mathbf{N} dS \quad (2.9)$$

2.3.4 Méthode d'assemblage :

L'assemblage permet d'obtenir la matrice de rigidité globale et le vecteur des efforts à partir de la matrice de rigidité élémentaire et du vecteur des efforts élémentaire.

Lors de la construction du maillage apparaissent des éléments et des nœuds, un exemple de maillage est représenté sur la figure 2.2. La numérotation des nœuds peut se faire de façon globale (numérotation relative au maillage entier) ou locale (numérotation relative à un élément particulier).

La correspondance entre les numérotations locale et globale se fait par la matrice de connectivité habituellement notée \mathbf{L} .

Le numéro global du $i^{\text{ème}}$ nœud du $j^{\text{ème}}$ élément est $\mathbf{L}(i, j)$.

Dans l'exemple précédent les numéros des nœuds de l'élément 3 sont :

$$L(1, 3) = 4; L(2, 3) = 5; L(3, 3) = 2$$

La matrice de rigidité globale s'obtient en faisant la somme pour chaque nœud (numérotation globale) des termes correspondants dans les matrices élémentaires des éléments connectés au nœud. Un exemple d'assemblage est exposé au chapitre 4.6.3.

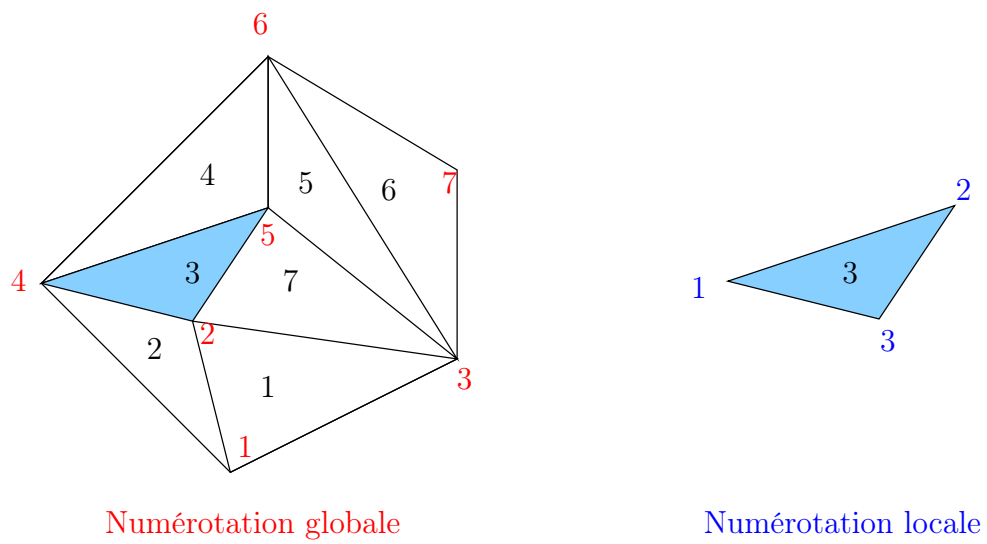


FIGURE 2.2: Maillage

Chapitre 3

Éléments massifs :

Les éléments massifs utilisent uniquement des degrés de libertés en déplacement, contrairement aux éléments de structures (éléments du type poutre, coques et plaques) qui utilisent aussi des degrés de libertés en rotation. Le nombre de degrés de libertés par nœud correspond donc à la dimension de l'espace discrétisé : 2 dans le cas d'une approche en contraintes planes, déformations planes ou axisymétrique et 3 dans le cas d'une approche tridimensionnelle. Dans ce qui suit, nous allons voir quelques éléments bidimensionnels parmi les plus courants, l'approche permettant de développer un élément tridimensionnel est identique mais met en œuvre un plus grand nombre d'équations.

3.1 Éléments triangulaires à trois nœuds (TRI3).

Ce sont les éléments bidimensionnels les plus simples et les plus couramment utilisés (quelquefois à tort). Ces éléments sont basés sur une géométrie triangulaire :

Dans la base de référence (\vec{X}, \vec{Y}) , on note u_i et v_i les projections du déplacement du nœud I sur les vecteurs de base (figure 3.1). L'élément triangulaire à 3 nœuds possède donc 6 degrés de liberté.

3.1.1 Matrice des fonctions de forme :

Le déplacement $\mathbf{U} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ d'un point M de coordonnées $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ est déduit de la matrice des fonctions de forme \mathbf{N} et du vecteur déplacement élémentaire \mathbf{X} tel que $\mathbf{X}^t = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_k \quad v_k]$. Comme les déplacements u et v sont indépendants, nous obtenons pour \mathbf{U} :

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_i(x, y) & 0 & \varphi_j(x, y) & 0 & \varphi_k(x, y) & 0 \\ 0 & \psi_i(x, y) & 0 & \psi_j(x, y) & 0 & \psi_k(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

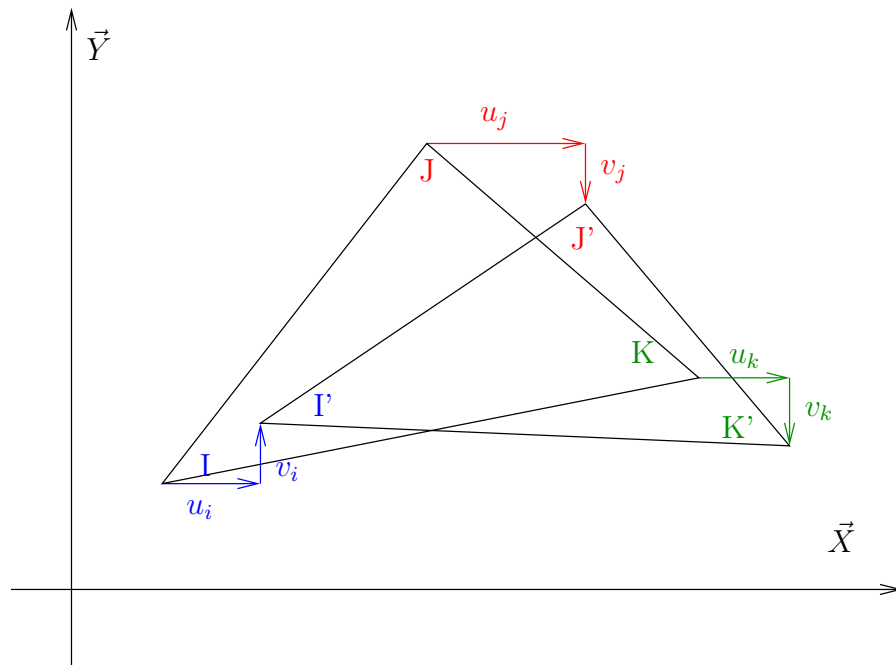


FIGURE 3.1: Élément triangulaire à 3 nœuds.

Les conditions sur les fonctions de forme peuvent être résumées par les équations :

$$\varphi_i(J) = \delta_{ij}, \psi_i(J) = \delta_{ij}$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$

Les conditions sont identiques pour les fonctions φ et les fonctions ψ . Ces fonctions dépendent de 2 variables et sont déterminées par 3 conditions, ce sont donc des fonctions bilinéaires. Les déplacements d'un point de l'élément peuvent être représentés par le schéma ci-dessous :

on peut écrire :

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, y) &= a_i x + b_i y + c_i \\ \begin{cases} a_i x_i + b_i y_i + c_i = 1 \\ a_i x_j + b_i y_j + c_i = 0 \\ a_i x_k + b_i y_k + c_i = 0 \end{cases} & \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_i = \frac{y_j - y_k}{D} \\ b_i = \frac{x_k - x_j}{D} \\ c_i = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{D} \end{cases} \quad \text{avec } D = (x_i - x_j)(y_k - y_j) - (y_i - y_j)(x_k - x_j)$$

les autres fonctions de forme sont obtenues par permutation des indices i, j, k .

Remarque :

φ_i, φ_j et φ_k sont les coordonnées barycentriques du point M dans le triangle IJK (figure 3.3) :

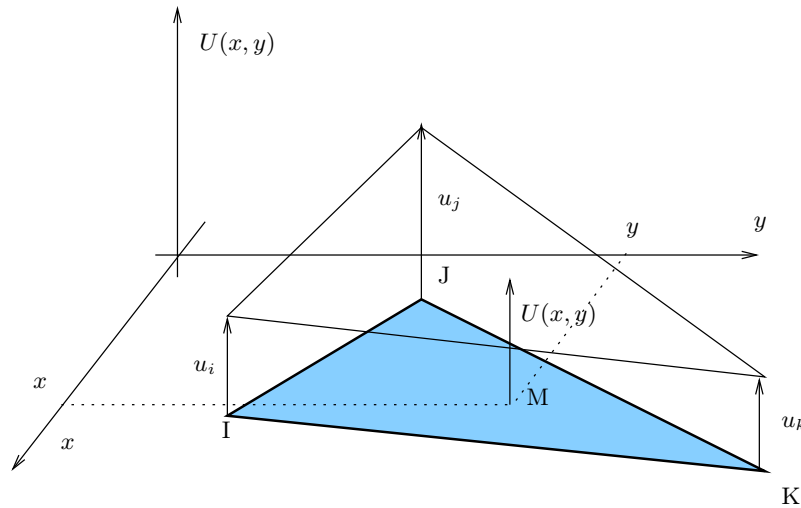


FIGURE 3.2: Champ de déplacements dans un triangle

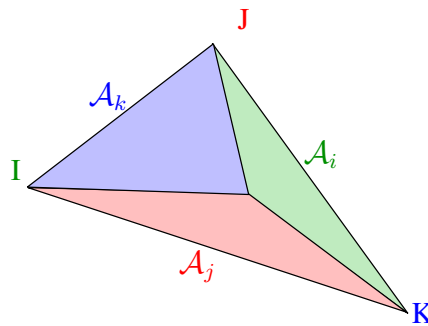


FIGURE 3.3: Coordonnées barycentriques

si on note \mathcal{A} l'aire du triangle : $2\mathcal{A} = \|\wedge\|$, on a également $2\mathcal{A}_i = \|\wedge\|$, $2\mathcal{A}_j = \|\wedge\|$ et $2\mathcal{A}_k = \|\wedge\|$

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, y) &= \frac{\mathcal{A}_i}{\mathcal{A}} \\ \varphi_j(x, y) &= \frac{\mathcal{A}_j}{\mathcal{A}} \\ \varphi_k(x, y) &= \frac{\mathcal{A}_k}{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

3.1.2 Calcul des déformations :

En prenant l'hypothèse des petites perturbations, nous avons : $\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla U + \nabla^t U)$

En contraintes planes ou déformations planes :

$$\varepsilon : \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

en contraintes planes, ε_{33} est calculé à partir de $\sigma_{33}=0$; en déformations planes $\varepsilon_{33}=0$

on note généralement : $\tilde{\varepsilon} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$ et $\tilde{\sigma} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix}$ ainsi l'énergie élastique par exemple s'écrit : $W =$

$$\frac{1}{2}\sigma : \varepsilon = \frac{1}{2}\tilde{\sigma} \cdot \tilde{\varepsilon}$$

remarque : dans certains codes industriels (dont la conception est souvent relativement ancienne) la notation suivante est utilisée :

$\tilde{\varepsilon} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$ et $\tilde{\sigma} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$ cette notation a le désavantage de traiter différemment les contraintes

et les déformations : si on veut par exemple calculer les valeurs propres d'une matrice, il faudra reconnaître au préalable si la matrice représente des contraintes ou des déformations.

$$\tilde{\varepsilon} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dy} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dy} \\ \frac{d}{dy} & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\partial} U_e = \tilde{\partial} (\mathbf{N} \mathbf{X}_e) = \left(\tilde{\partial} \mathbf{N} \right) \mathbf{X}_e = \mathbf{B} \mathbf{X}_e$$

$$\text{on obtient donc : } \mathbf{B} = \tilde{\partial} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_k \\ \frac{a_i}{\sqrt{2}} & \frac{b_i}{\sqrt{2}} & \frac{a_j}{\sqrt{2}} & \frac{b_j}{\sqrt{2}} & \frac{a_k}{\sqrt{2}} & \frac{b_k}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Comme on pouvait s'y attendre, les déformations sont constantes dans l'élément ce qui limite le champ d'application de ces éléments aux problèmes pour lesquels les gradients de déformations sont faibles.

3.1.3 Calcul des contraintes :

Les contraintes sont calculées à partir des déformations et des données sur la loi de comportement : $\tilde{\sigma} = \mathbf{C} \tilde{\varepsilon}$

Dans le cas bidimensionnel, l'expression de la matrice \mathbf{C} dépend de l'hypothèse prise :

3.1.3.1 Cas des déformations planes :

L'hypothèse des déformations planes s'applique au problèmes généralement de forte épaisseur dont les déplacements perpendiculaires au plan de modélisation sont bloqués. On peut considérer alors que la déformation $\varepsilon_{33} = 0$. Un exemple classique est le cas d'un barrage, le cas du barrage de San Fernando qui a subi un tremblement de terre en 1971.

La matrice \mathbf{C} peut directement être déduite des paramètres de Lamé : $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ et $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$:

$$\mathbf{C} : \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}$$

3.1.3.2 Cas des contraintes planes :

L'hypothèse des contraintes planes s'applique au problèmes généralement de faible épaisseur pour lesquels on peut considérer que la contrainte $\sigma_{33} = 0$.

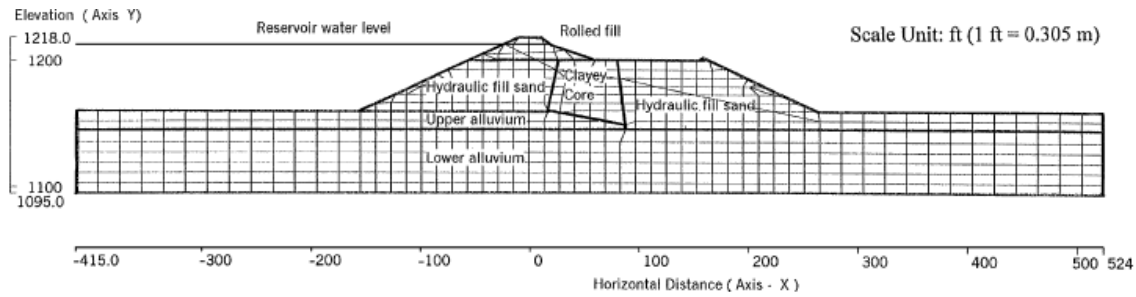


FIGURE 3.4: Exemple de calcul en déformation plane [13]

On peut prendre par exemple le cas traité au chapitre 5.1 et représenté sur la figure 5.1. En contraintes planes, il faut avant tout calculer ε_{33} à partir de l'équation $\sigma_{33} = 0$.

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = 0 \\ \varepsilon_{33} &= \frac{-\lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})}{\lambda + 2\mu} \text{ soit : } (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\ \text{en posant } \lambda' &= \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \text{ on obtient : } \mathbf{C} : \begin{bmatrix} \lambda' + 2\mu & \lambda' & 0 \\ \lambda' & \lambda' + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.2 Calculs axisymétriques :

Les calculs axisymétriques sont applicables aux problèmes concernant une géométrie de révolution à symétrie axiale soumis à des chargements possédant la même symétrie :

par exemple : une tour de refroidissement soumise à son propre poids peut être simulée par un calcul axisymétrique, si la tour est soumise aux actions du vent, il faudra faire un calcul tridimensionnel (figure ??).

Un élément d'un maillage axisymétrique représente un tore qui a pour base l'élément (figure ??).

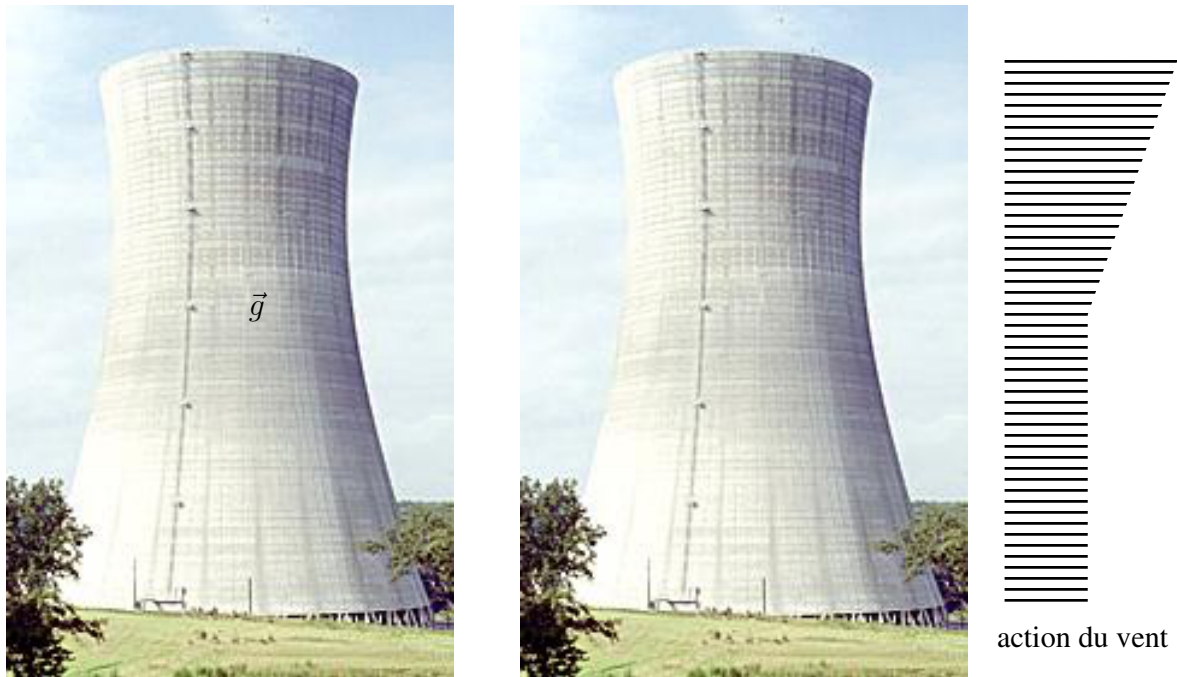
3.2.1 Déplacements :

Pour des raisons de symétrie, les composantes du déplacement d'un point M de coordonnées (r, θ, z) se réduisent à $u_r(r, z)$ et $u_z(r, z)$ (figure ??) ces deux composantes représentent les degrés de liberté de chaque noeud : $\mathbf{U}_e = \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix}$

3.2.2 Calcul des déformations :

Les composantes du tenseur des déformations sont :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{du_z}{dz}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_z}{dr} + \frac{du_r}{dz} \right), \quad \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta z} = 0$$



Calcul axisymétrique

Calcul tridimensionnel

FIGURE 3.5: Sollicitations sur une structure axisymétrique

nous poserons dans ce cas : $\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{rz} \end{bmatrix}$,

l'opérateur $\tilde{\partial}$ peut alors s'écrire : $\tilde{\partial} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dr} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dz} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dz} & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dr} \end{bmatrix}$

3.2.3 Calcul des contraintes :

Le tenseur des contraintes est représenté par le vecteur $\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sqrt{2}\sigma_{rz} \end{bmatrix}$ et est calculé à partir des déformations par l'intermédiaire de la matrice de comportement \mathbf{C} : $\tilde{\sigma} = \mathbf{C}\tilde{\varepsilon}$ avec :

$$\mathbf{C} : \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}$$

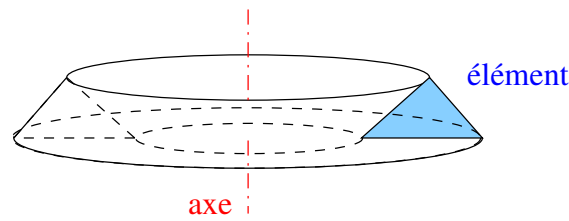


FIGURE 3.6: représentation d'un élément en axisymétrie

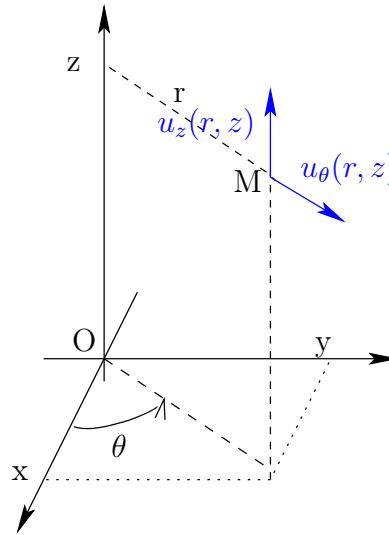


FIGURE 3.7: Déplacements axisymétriques

3.3 Éléments quadrilatères à 4 nœuds (QUA4) :

Ces éléments sont basés sur une géométrie de type quadrilatère, les nœuds sont placés à chaque angle du quadrilatère.

Afin de limiter les calculs, ceux-ci sont effectués dans un espace unitaire noté \mathcal{U} , une transformation notée \mathcal{T} est effectuée sur l'élément pour se placer dans un espace géométrique original \mathcal{G} .

La transformation \mathcal{T} est biunivoque si le déterminant du jacobien correspondant au changement de variable est non nul :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} \end{bmatrix}, \text{Det}(J) \neq 0 \quad \text{, le déterminant est nul si l'élément est plat (figure ??)}$$

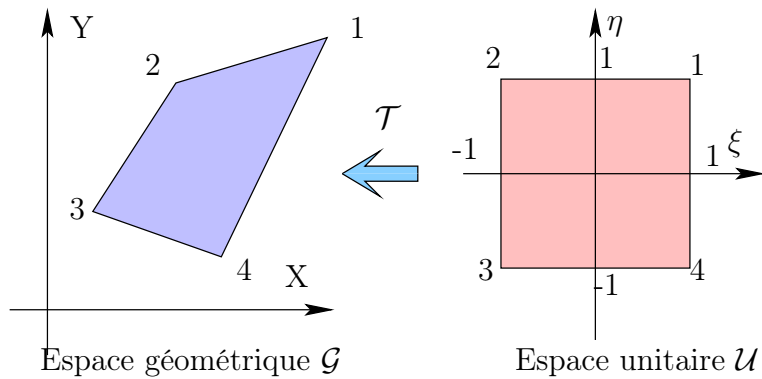


FIGURE 3.8: Transformation \mathcal{T}

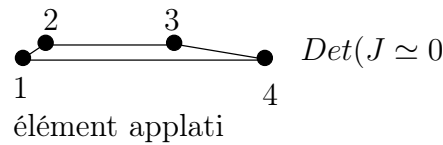
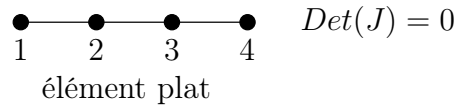


FIGURE 3.9: Géométrie d'éléments à éviter

3.3.1 Fonctions de forme dans l'espace unitaire :

Soit un point P de l'élément défini par ces coordonnées dans l'espace unitaire $U : P \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$, le vecteur déplacement $\mathbf{U}_e \begin{bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{bmatrix}$ de P est donné par la matrice \mathbf{N} des fonctions de forme et le vecteur \mathbf{X}_e des degrés de liberté dans l'élément : $\mathbf{X}_e^T : [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4] :$

$$\begin{bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 & \varphi_4 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 & \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

avec $\varphi_1(1,1) = 1, \varphi_1(-1,1) = 0, \varphi_1(-1,-1) = 0, \varphi_1(1,-1) = 0$
 $\varphi_1(\xi, \eta) = a_1\xi\eta + b_1\xi + c_1\eta + d_1 = \frac{1}{4}(\xi + 1)(\eta + 1)$

Les fonctions de forme sont des fonctions bi-quadratiques auxquelles on a élevé les termes en ξ^2 et η^2 . D'une façon plus générale, en notant (ξ_i, η_i) les coordonnées du noeud i ($i = 1, 4$), on obtient :

$$\varphi_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\xi_i\xi + 1)(\eta_i\eta + 1).$$

3.3.2 Expression de la transformation \mathcal{T} :

Les éléments construits sont de la famille des éléments isoparamétriques : la transformation permettant de passer de l'espace unitaire \mathcal{U} à l'espace géométrique \mathcal{G} est donnée par les fonctions d'interpolation : Soit P un point de l'élément dont les coordonnées sont (ξ, η) dans l'espace unitaire \mathcal{U} , ces coordonnées dans l'espace géométrique \mathcal{G} sont obtenus à partir de la matrice \mathbf{N} des fonctions de forme et du vecteur défini par les positions (x_i, y_i) de chaque noeud i dans \mathcal{G} :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 & \varphi_4 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 & \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

3.3.3 Calcul des déformations :

$$\mathbf{B} = \tilde{\delta}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dy} \end{bmatrix} \mathbf{N} \text{ avec : } \begin{bmatrix} \frac{d}{d\xi} \\ \frac{d}{d\eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dy} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dx}{d\eta} \\ \frac{dy}{d\xi} & \frac{dy}{d\eta} \end{bmatrix} \text{ soit } \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dy} \end{bmatrix} = J^{-1T} \begin{bmatrix} \frac{d}{d\xi} \\ \frac{d}{d\eta} \end{bmatrix} \text{ La}$$

matrice \mathbf{B} n'est plus constante dans l'élément, l'intégration de la matrice peut se faire :

- Explicitement : peut mener à des problèmes mal conditionnés.
- Numériquement : on utilise en général le théorème de Gauss Legendre.

Soit $\mathcal{I} = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi$, alors $\mathcal{I} = \sum_{i=1}^N w_i f(\xi_i)$ si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2N - 1$, les ξ_i sont les positions des points d'intégration appelés aussi points de Gauss et les w_i sont les poids associés à chaque point de Gauss. Les ξ_i et w_i sont donnés pour les cas les plus courants dans le tableau ?? :

N	ξ_i	w_i	$2N - 1$
1	0	2	1
2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	3
	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	
3	$-\frac{\sqrt{3}}{5}$	$\frac{5}{9}$	5
	0		
	$\frac{\sqrt{3}}{5}$		

TABLE 3.1: Position et poids associés aux points de Gauss

3.4 Éléments isoparamétriques, quelques exemples supplémentaires :

On peut développer de la même manière, des éléments isoparamétriques de degré plus élevé. Les côtés des éléments ne sont plus rectilignes puisqu'ils sont définis par transformation d'une droite à l'aide des fonctions de forme. Quelques exemples sont donnés dans le tableau 3.2 :

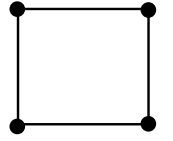
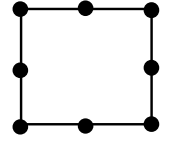
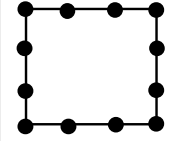
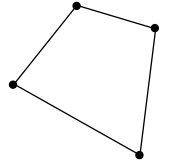
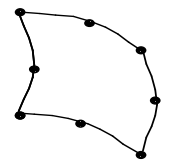
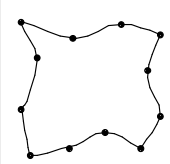
degré d'interpolation	1	2	3
Élément dans \mathcal{U}			
Élément dans \mathcal{G}			
Forme des côtés	linéaire	quadratique	cubique

TABLE 3.2: Éléments isoparamétriques à base quadrangulaire

Chapitre 4

Éléments de flexion de type poutre :

4.1 Position du problème :

On souhaite développer un élément capable de reproduire les hypothèses classiques mises en œuvre dans les calculs de structures poutres à flexion dominante. Afin de simplifier la présentation, nous ferons les hypothèses suivantes :

- Les énergies de déformation due aux efforts normaux et tranchants sont négligées.
- Les sections initialement planes et perpendiculaires à la fibre moyenne restent planes et perpendiculaires à la fibre moyenne pendant la déformation (hypothèse de Navier Bernoulli).
- On se restreint au cas des poutres planes chargées dans leur plan.
- On se place dans le cadre des petites perturbations (petits déplacements, petites rotations et petites déformations).

Les degrés de liberté de chaque nœuds sont choisis de façon à représenter les hypothèses cinématiques de Navier et à éviter toute cassure d'angle pendant la déformée :

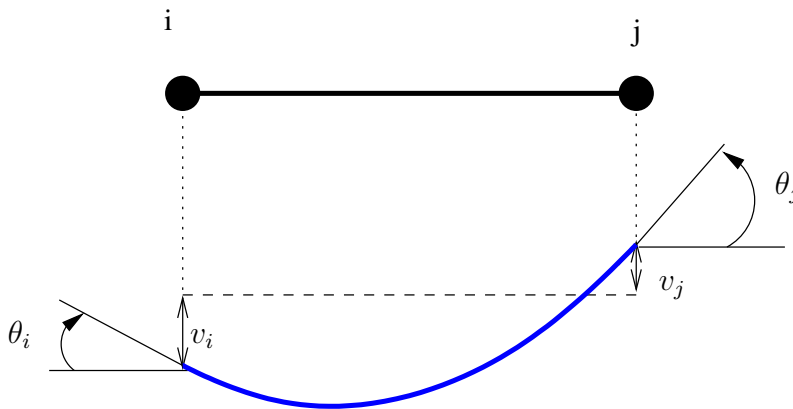


FIGURE 4.1: Déplacement dans un élément de type poutre

le déplacement d'un point est caractérisé par le vecteur $\mathbf{U} : \begin{bmatrix} v \\ \theta \end{bmatrix}$ avec $\theta = \frac{dv}{dx}$

Les éléments ainsi fabriqués utilisent les déplacements et leur dérivées comme degrés de liberté ; on les qualifie de élément hermitiens ou éléments de Hermite.

4.2 Détermination des fonctions de forme :

On utilise la coordonnée réduite $\xi = \frac{x}{l}$, il faut déterminer $\mathbf{N}(\xi)$ telle que $v(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{X}$ avec

$$\mathbf{X} : \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

Posons : $\mathbf{N}(\xi) = [\varphi_i(\xi) \quad \psi_i(\xi) \quad \varphi_j(\xi) \quad \psi_j(\xi)]$, nous avons :

$$\begin{cases} v(\xi) &= v_i \varphi_i(\xi) + \theta_i \psi_i(\xi) + v_j \varphi_j(\xi) + \theta_j \psi_j(\xi) \\ \theta(\xi) &= \frac{1}{l} [v_i \varphi_i'(\xi) + \theta_i \psi_i'(\xi) + v_j \varphi_j'(\xi) + \theta_j \psi_j'(\xi)] \end{cases} \text{ avec } ' = \frac{d}{d\xi}$$

Pour des raisons évidentes, les fonctions de base doivent permettre d'obtenir $v(0) = v_i, v(1) = v_j, \theta(0) = \theta_i$ et $\theta(1) = \theta_j$. Ces conditions sont résumées dans le tableau ??.

	Valeur en $\xi=0$	Valeur en $\xi=1$	Dérivée en $\xi=0$	Dérivée en $\xi=1$
φ_i	1	0	0	0
φ_j	0	1	0	0
ψ_i	0	0	1	0
ψ_j	0	0	0	1

TABLE 4.1: Conditions de compatibilité des fonctions de base

Si on choisit des polynômes pour la forme des fonctions d'interpolation, alors ces polynômes sont du troisième degré et on obtient :

$$\begin{cases} \varphi_i(\xi) = (\xi - 1)^2 (a\xi + b) \text{ avec } \varphi_i(0) = b = 1 \text{ et } \varphi_i'(0) = -2b + a = 0 \Rightarrow \varphi_i(\xi) = (\xi - 1)^2 (2\xi + 1) \\ \varphi_j(\xi) = \xi^2 (a\xi + b) \text{ avec } \varphi_j(1) = a + b = 1 \text{ et } \varphi_j'(1) = 3a + 2b = 0 \Rightarrow \varphi_j(\xi) = \xi^2 (-2\xi + 3) \\ \psi_i(\xi) = l\xi (\xi - 1)^2 \\ \psi_j(\xi) = l\xi^2 (\xi - 1) \end{cases}$$

on obtient finalement :

$$\mathbf{N} : [(\xi - 1)^2 (2\xi + 1) \quad l\xi (\xi - 1)^2 \quad \xi^2 (-2\xi + 3) \quad l\xi^2 (\xi - 1)] \tag{4.1}$$

4.3 Calcul de la déformation :

La déformation dans la poutre soumise en flexion est caractérisée par :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = -\frac{d\theta y}{dx} = -y \frac{d\theta}{dx} = -y \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{y}{l^2} \frac{d^2 v}{d\xi^2}$$

d'autre part $\varepsilon_{xx} = \mathbf{B} \mathbf{X}$ donc $\mathbf{B} = -\frac{y}{l^2} \frac{d^2 \mathbf{N}}{d\xi^2}$

L'expression de \mathbf{B} est obtenue à partir de l'équation 4.1 :

$$\mathbf{B} = -\frac{y}{l^2} [12\xi - 6 \quad l(6\xi - 4) \quad -12\xi + 6 \quad l(6\xi - 2)] \tag{4.2}$$

4.4 Matrice de rigidité élémentaire :

La contrainte σ_{xx} est calculée pour un matériau élastique : $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$, la matrice de rigidité s'obtient donc de la manière suivante : $\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T E \mathbf{B} d\Omega \Rightarrow \mathbf{K}_{ij} = E \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_i \mathbf{B}_j d\Omega$

Et d'après l'expression de \mathbf{B} (équation 4.2) on obtient \mathbf{K}_{11} :

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{11} &= E \int_0^1 \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{y^2}{l^4} (12\xi - 6)^2 l d\xi dy dz \\ \mathbf{K}_{11} &= \frac{E}{l^3} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy dz \int_0^1 (12\xi - 6)^2 d\xi \\ \mathbf{K}_{11} &= 12 \frac{E}{l^3} I_{GY}\end{aligned}$$

On trouve les autres termes de la même manière et finalement on obtient :

$$\mathbf{K}_e = \frac{E}{l^3} I_{Gz} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

4.5 Vecteur des efforts généralisés :

Cas d'un effort uniformément réparti f :

$$\mathbf{F}_e = \int_{\Omega_e} f_d \mathbf{N} d\Omega$$

L'expression de \mathbf{N} (équation 4.1) permet de trouver le vecteur des efforts élémentaires :

$$\mathbf{F}_e^T = fSl \left[\frac{1}{2} \quad \frac{l}{12} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{l}{12} \right] \quad (4.4)$$

4.6 Exercice :

Mettre en place le(s) système(s) d'équations donnant la solution éléments finis pour le problème suivant avec une discrétisation de 4 éléments de taille égale.

4.6.1 Discrétisation :

La poutre est discrétisée en 4 éléments de longueur $l = \frac{L}{2}$.

4.6.2 Conditions aux limites :

L'effort uniformément réparti sera pris en compte dans le vecteur des efforts.

4.6.3 Assemblage de la matrice de rigidité et du vecteur des efforts :

La matrice de rigidité est assemblée à partir des quatre matrices de rigidité élémentaires (équation 4.3). Les couleurs des termes de la matrice correspondent à celles des éléments de la figure

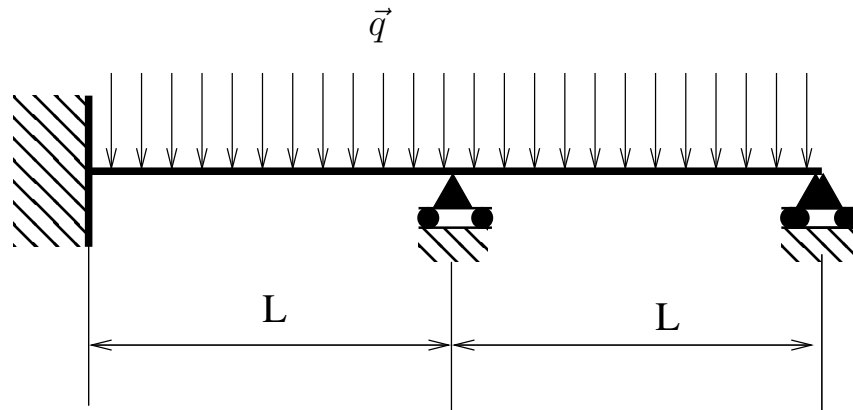


FIGURE 4.2: Exemple de structure poutre

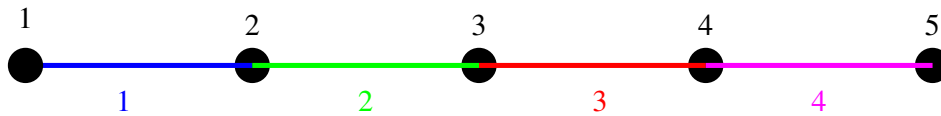


FIGURE 4.3: Discrétisation de la poutre

??

$$\mathbf{K} = \frac{E}{l^3} I_{Gz}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 12 + 12 & -6l + 6l & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 2l^2 & -6l + 6l & 4l^2 + 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 + 12 & -6l + 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l + 6l & -4l^2 + 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 12 + 12 & -6l + 6l & -12 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l + 6l & 4l^2 + 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Nom	Condition	Effort associé
Encastrement :	$v_1 = 0$	V_1
	$\theta_1 = 0$	M_1
Appuis :	$v_3 = 0$	V_3
	$v_5 = 0$	V_5

TABLE 4.2: Conditions aux limites en déplacement et rotation

Soit donc :

$$\mathbf{K} = \frac{E}{l^3} I_{Gz} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

La matrice de raideur est symétrique, sa structure "bande" est liée à la numérotation des nœuds. La structure bande de la matrice permet une résolution plus aisée donc numériquement plus rapide. Il est donc intéressant de numéroter le maillage de façon à obtenir une matrice ayant une telle structure. Dans la pratique, un premier maillage est réalisé sans se soucier de la numérotation, puis les nœuds sont re-numérotés afin d'optimiser la structure de la matrice. Les logiciels aux éléments finis se chargent généralement de faire cette opération de manière transparente.

On assemble de la même manière le vecteur des efforts à partir de l'expression donnée dans l'équation 4.4 :

$$\mathbf{F}^T = fSl \left[\frac{1}{2} \quad \frac{l}{12} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad -\frac{l}{12} + \frac{l}{12} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad -\frac{l}{12} + \frac{l}{12} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad -\frac{l}{12} + \frac{l}{12} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{l}{12} \right]$$

Ou encore :

$$\mathbf{F}^T = fSl \left[\frac{1}{2} \quad \frac{l}{12} \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{l}{12} \right]$$

On obtient finalement le système suivant (les inconnues sont soulignées) :

$$\frac{E}{l^3} I_{Gz} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{v_2} \\ \underline{\theta_2} \\ 0 \\ \underline{\theta_3} \\ \underline{v_4} \\ \underline{\theta_4} \\ 0 \\ \underline{\theta_5} \end{bmatrix} =$$

$$= fSl \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{12} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{l}{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_1}{M_1} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{V_3}{0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{V_5}{0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce système peut être résolu en deux temps :

On résout premièrement le système d'équations dont les inconnues sont les degrés de liberté :

Le système d'équations obtenu est normalement de dimension (Nombre de degrés de liberté)x(Nombre de degrés de liberté - nombre de déplacements imposés) soit (10x6) dans notre cas. Comme les déplacements imposés sont nuls, le système se réduit à un système (6x6) :

$$\frac{E}{l^3} I_{Gz} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8l^2 & 2l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 2l^2 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 \\ 0 & 0 & -6l & 24 & 0 & 6l \\ 0 & 0 & 2l^2 & 0 & 8l^2 & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = fSl \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{l}{12} \end{bmatrix}$$

Dans un deuxième temps on peut trouver les inconnues en variables duales (Efforts et moments) en calculant directement :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_3 \\ V_5 \end{bmatrix} = \frac{EI_{Gz}}{l^3} \begin{bmatrix} -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 0 & -12 & 6l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & -6l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} - fSl \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{12} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Chapitre 5

Exemples :

5.1 Problème de mécanique, plaque trouée.

5.1.1 Problème posé :

Il s'agit dans un premier temps de poser le problème correctement en notant toutes les informations disponibles (géométrie, matériau, chargement) ainsi que celles désirées (contraintes, déplacements ...). À cette étape, il faut se rapprocher au mieux du problème réel et faire un minimum d'hypothèses.

La géométrie du problème considéré est reportée sur la figure 5.1 et les grandeurs caractéristiques et dimensionnelles sur le tableau 5.1.

On cherche la charge maximale q_{max} pour laquelle le matériau reste élastique.

5.1.2 Solution approchée du problème :

Il est important avant d'effectuer tout calcul à l'ordinateur (aux éléments finis pour par n'importe quelle autre méthode) de se faire une idée de la solution du problème en posant des hypothèses simplificatrices (même si elles peuvent paraître abusives).

Si on fait l'hypothèse que la contrainte est uni-axiale d'axe vertical \vec{y} (hypothèse type théorie des poutres ou RdM), l'équilibre de la demi plaque donne $4\vec{q}R - 2\sigma Re\vec{y} = 0$, soit $q = \frac{\sigma e}{2}$.

$$q_{max}^{rdm} = \frac{\sigma_y e}{2} = 1250kN/m \quad (5.1)$$

Ce qui fait une charge résultante de 151kN.

E	ν	ρ	σ_y
2,1GPa	0.3	7800kg/m ³	500MPa

H	R	e
200mm	50mm	5mm

TABLE 5.1: Caractéristiques et dimensions

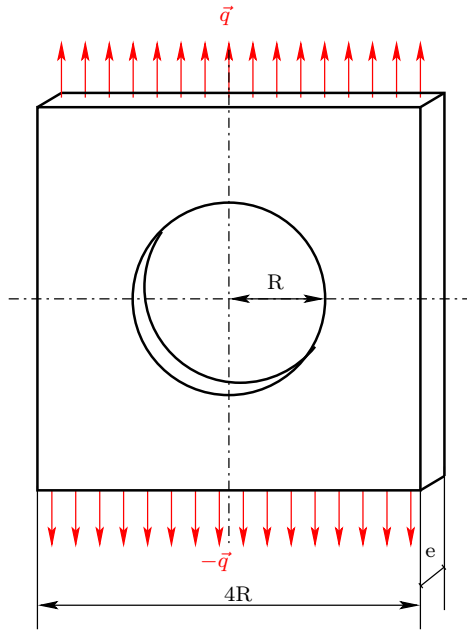
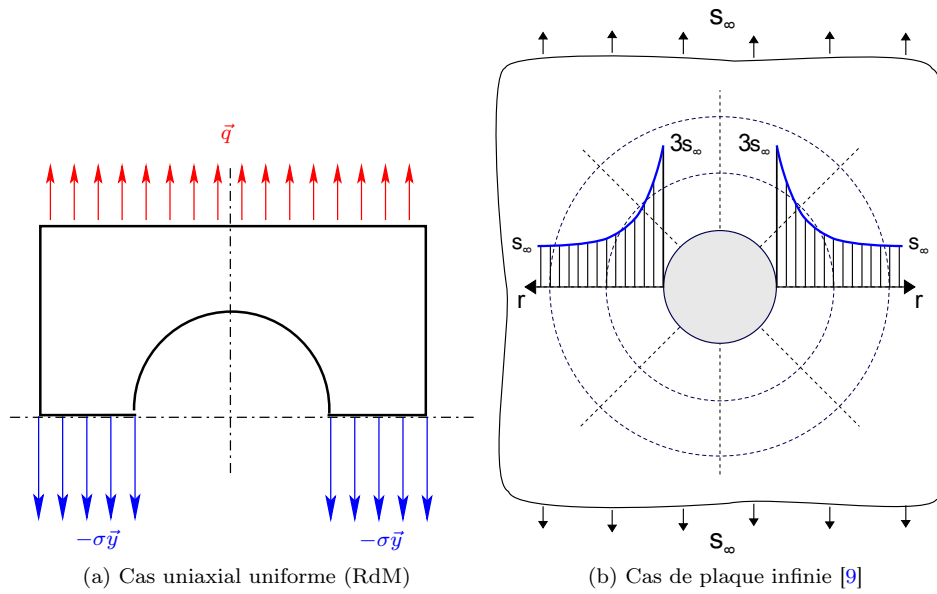


FIGURE 5.1: Plaque trouée



(a) Cas uniaxial uniforme (RdM)

(b) Cas de plaque infinie [9]

FIGURE 5.2: Hypothèses de répartition des contraintes

On peut également faire se baser sur la solution analytique pour une plaque trouée de dimensions infinies qui a été mise en évidence pour la première fois en 1898 [7] (on peut consulter [9] pour plus de détails).

La contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ sur l'axe horizontal en un point distant de r du centre du cercle s'exprime par

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{\sigma_{\infty}}{2} \left(2 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 + 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right)$$

soit pour $r = R$, on obtient $\sigma_{max} = 3\sigma_{\infty}$, ce qui donne une contrainte 50% plus importante que la précédente hypothèse.

On obtient alors pour cette approximation :

$$q_{max}^{\infty} = \frac{\sigma_y e}{3} \approx 833kN/m \quad (5.2)$$

Dans la simulation aux éléments finis qui suit, on impose une charge linéique $q = e * \sigma_{\infty}$ avec $\sigma_{\infty} = 100MPa$

5.1.3 Choix de l'échelle de modélisation, hypothèses de calcul :

On peut décider de modéliser le problème en 1D, 2D, 3D, avec des éléments massifs ou des éléments de structure (poutres, coques). Les choix doivent s'effectuer en fonction de la validité des hypothèses prises pour les éléments de structure, de la qualité souhaitée pour la solution et de la capacité des ordinateurs disponibles. Plus les hypothèses seront fortes et éloignées de la réalité, plus on a des chances de s'éloigner de la solution. Par contre les simulations tridimensionnelles avec des éléments massifs peuvent devenir rapidement lourdes et dépasser les capacités des ordinateurs de bureau actuels. Il s'agit là d'un vrai travail d'ingénieur qui consiste à formuler les hypothèses les plus adaptées.

Dans notre cas, les éléments de structure ne sont pas adaptés (à moins de se contenter de la solution uniaxiale uniforme). On peut par contre faire l'hypothèse d'un calcul plan, c'est à dire que les grandeurs ne varient pas dans l'épaisseur de la plaque. L'hypothèse des contraintes planes est la plus adaptée au problème. On peut également faire raisonnablement l'hypothèse d'un problème possédant 2 symétries par rapport aux axes vertical et horizontal passant par le centre du trou.

Les simulations pourront se faire dans l'hypothèse des petites perturbations et en élasticité linéaire (au moins dans un premier temps).

5.1.4 Première solution aux éléments finis :

Il s'agit de trouver une première approximation de la solution. On génère un maillage grossier qui permet néanmoins de représenter correctement la géométrie. Le type d'éléments à utiliser dans cette première approximation sera linéaire car les erreurs de discrétisation sont plus facilement identifiables sur ce type d'éléments (discontinuité des contraintes). Dans le cas bidimensionnels, je recommande d'utiliser des triangles linéaires.

5.1.4.1 Génération du maillage.

On maille un quart de la structure en tenant compte des conditions de symétrie. Afin de représenter "correctement" la géométrie (en particulier le quart de cercle) on choisit une taille de maille permettant de représenter le quart de cercle par 5 éléments linéaires.

Il faut générer dans l'ordre :

- Les nombres (paramètres du problème)
- Les points
- Les lignes
- Les surfaces
- Éventuellement les volumes

Lors de la génération du maillage, il faut anticiper la création des géométries qui seront utiles par la suite par exemple pour l'application des conditions aux limites.

La génération du maillage peut être effectuée préalablement au calculs et de façon indépendante du programme aux éléments finis lui-même. On peut par exemple utiliser GMSH qui est disponible gratuitement et est une des plus populaires. Le code aux éléments finis CAST3M possède son propre mailleur et on peut écrire en langage GIBIANE :

Nombres

```
OPTION DIMENSION 2 ELEMENT TRI3 MODE PLAN CONTRAINTE;  
*  
* parametres du problème  
*  
R=0.05;  
H=2*R;  
L1=H;  
EP1=5.E-3;  
DENS1=R*PI/10;  
SIGE=500.E6;
```

Points

```
*  
* points maitres  
* l'opérateur densité affecte aux points générés à sa suite une taille de maille  
* qui sera utilisé pour la génération des lignes et surfaces  
*  
densite dens1;  
P0=0. 0.;  
P1=R 0.;  
P2=L1 0.;  
P3=L1 H;  
P4=0. H;  
P5=0. R;
```

Lignes

```
*  
* construction du contour  
*  
D1=DROI P1 P2;
```

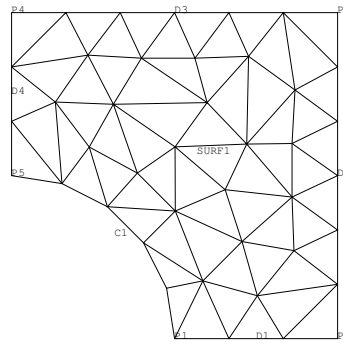


FIGURE 5.3: Premier maillage

```

D2=DROI P2 P3;
D3=DROI P3 P4;
D4=DROI P4 P5;
C1=CERC P5 P0 P1;
CONT1=D1 ET D2 ET D3 ET D4 ET C1;

```

Surface

```

*
*fabrication de la surface;
*
SURF1=SURFACE CONT1 PLANE;
TRACER SURF1 QUAL;

```

Le maillage obtenu est représenté sur la figure 5.3, on vérifie que la géométrie est correcte et que les éléments ne soient pas trop aplatis.

5.1.4.2 Modèle de résolution et caractéristiques :

Dans un code aux éléments finis multi-physique, il est faut indiquer quelles équations de la physique on souhaite résoudre, il faut ensuite donner les caractéristiques matérielles.

```

MOD1=MODELE SURF1 MECANIQUE ELASTIQUE PLASTIQUE PARFAIT;
MAT1=MATE MOD1 YOUN 2.1E11 NU 0.28 DIM3 EP1 SIGY SIGE;

```

5.1.4.3 Conditions aux limites :

On doit tenir compte des symétries qui se traduisent par un blocage des déplacements des noeuds situés sur les axes de symétrie dans la direction perpendiculaire à celui-ci. soit ici :

— On bloque le déplacement U_y sur la droite D_1 et le déplacement U_x sur la droite D_4 .

```

*
*conditions aux limites

```

*

CL1=BLOQ D1 UY; CL2=BLOQ D4 UX;

— On applique la pression sur la ligne D3 (La charge linéique est égale à la contrainte exercée multipliée par l'épaisseur).

F1=PRESSION MASSIF MOD1 D3 (-1*PRESS1*EP1);

5.1.4.4 Résolution du problème :

Matrice de rigidité

*

* rigidité matérielle

*

RIG1=RIGI MOD1 MAT1;

*

* On assemble avec les raideurs dues aux conditions aux limites pour obtenir la rigidite totale

*

RITOT=RIG1 ET CL1 ET CL2;

Solution La solution du problème est donnée par le déplacement solution de l'équation 2.2.

*

* Champ de déplacement solution

*

DEP1=RESOU RITOT F1;

5.1.4.5 Post traitement des résultats :

Il faut dans un premier temps s'assurer qu'on a résolu le bon problème, que les conditions aux limites souhaitées sont respectées, que la déformée et les contraintes sont plausibles. On peut à cet effet tracer l'état de contrainte sur la déformée.

DEF1=DEFO DEP1 SURF1;

SIG1=SIGMA DEP1 MOD1 MAT1;

TRACER SIG1 MOD1 DEF1;

L'état de contrainte est tri-dimensionnel, si on veut vérifier l'élasticité du matériau, il faut se baser sur une contrainte équivalente. Cette contrainte est calculée en fonction de l'ensemble des composantes du tenseur des contraintes et représente une contrainte uniaxiale équivalente à l'état triaxial vis à vis de la plasticité. La contrainte équivalente de Von Mises est couramment admise pour les matériaux métalliques.

5.1.4.6 Evaluation de la solution :

L'évaluation de la solution doit se faire sur la contrainte, en effet c'est la variable la plus mal approximée par la méthode des éléments finis du fait que la condition d'équilibre ne soit vérifiée que de façon faible. On remarque en particulier que l'état de contrainte (Figure 5.4b) est discontinu. Ceci

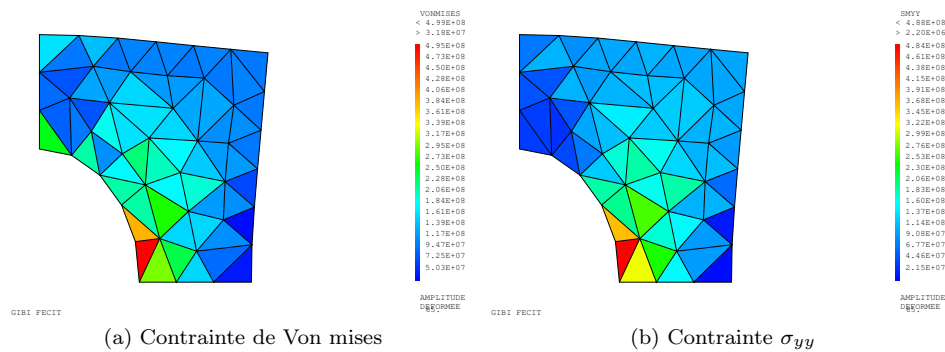


FIGURE 5.4: Tracé de la solution en contrainte

est également lié à l'utilisation de triangles à trois noeuds pour lesquels la contrainte est constante. L'erreur de la solution est de l'ordre de grandeur de la discontinuité de contrainte et dépasse les 100MPa dans la zone proche du trou. Il existe plusieurs estimateurs d'erreurs à posteriori mais leurs usages sont souvent limités aux activités de recherche. Je vous encourage à les utiliser s'ils sont disponibles dans le code que vous utilisez, dans la négative la discontinuité des contraintes est un bon estimateur de l'erreur, on pourra considérer que la solution est bonne si elle est quasi-inchangée lors de deux raffinements successifs.

Dans le cas présent, un raffinement est nécessaire sur l'ensemble du maillage, mais on peut déjà faire un effort plus important aux endroits où les gradients de contrainte sont élevés, c'est à dire dans le plan de symétrie horizontal et plus particulièrement proche du trou.

Les étapes de raffinement dans notre cas peuvent être les suivantes (voir figure 5.5) :

1. Raffinement irrégulier pour mailler plus finement les zones à fort gradient (on peut faire plusieurs étapes à ce niveau)
2. Raffinement uniforme (par exemple on divise la taille par 2 partout).
3. Éventuellement augmenter le degré d'interpolation des éléments (triangles à 6 noeuds ici).

La contrainte de Von Mises maximale trouvée dans la plaque $\sigma_{Max} \approx 640MPa$. Cette contrainte dépasse la limite élastique du matériau, le calcul étant linéaire, on peut évaluer la charge maximale admissible pour que le matériau ne plastifie pas : $\sigma_{\infty Max} = \frac{\sigma_y}{\sigma_{Max}} \sigma_{\infty} \approx 78MPa$ soit une charge linéique $q_{Max} = e\sigma_{\infty Max} \approx 390kN/m$

5.1.5 Conclusion :

La charge maximale admissible est de 390kN/m alors que l'approximation RdM donnait 1250kN/m et celle de la plaque trouée de dimensions infinies 833kN/m

Si on applique un coefficient de sécurité de 1,5 sur la charge et de 1,1 sur la limite élastique, la solution RdM donne une charge limite de 758kN/m et celle de la plaque infinie 505kN/m.

On voit sur cet exemple que même avec des coefficients correctifs classiques, les solutions analytiques sont incapables de représenter correctement le problème même avec l'adoption d'un coefficient de sécurité.

Heureusement dans le cas présent, la mise en plasticité locale du matériau ne compromet pas la stabilité, mais ce n'est pas toujours le cas.

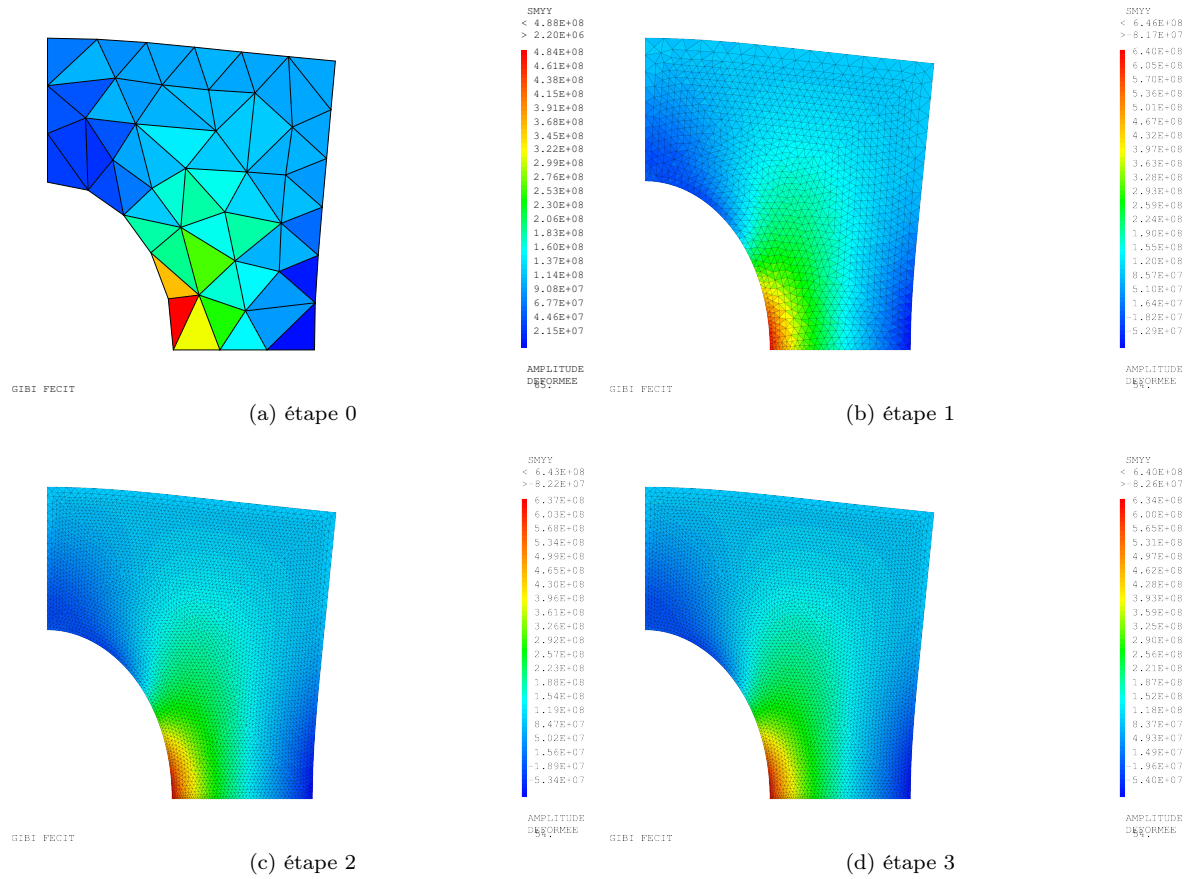


FIGURE 5.5: Étapes de raffinement.

Chapitre 6

Rappels sur les calculs thermiques :

6.1 Introduction :

6.1.1 Notations :

La structure (voir figure 6.1) sera notée Ω .

La frontière de Ω sera notée $\partial\Omega$.

La température $T_d(x, y, z)$ est imposée sur la partie $\partial_1\Omega$ de $\partial\Omega$.

Une densité de flux $\varphi_d(x, y, z)$ est imposée sur la partie $\partial_2\Omega$ de $\partial\Omega$ (les surfaces non sujettes à des flux convectifs ou radiatifs et sur lesquelles aucune température n'est imposée reçoivent une densité de flux nulle).

Une source volumique $q(x, y, z)$ est imposée sur Ω

$$\begin{cases} \partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega \\ \partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset \end{cases}$$

On ne peut pas imposer en un même lieu une densité de flux et une température dans la même direction.

6.1.2 Comportement thermique des matériaux, loi de Fourier [5].

La loi de Fourier est semi empirique, mais correspond au comportement de tous les matériaux pour peu qu'ils ne soient pas chauffés trop rapidement ni à trop haute température[8], elle stipule que la densité de flux de chaleur est proportionnelle au gradient de température.

$$\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

où :

- $\vec{\varphi}$ est la densité volumique de flux de chaleur et s'exprime en Wm^{-2}
- λ est la conductivité thermique, il s'agit d'un nombre dans les matériaux isotropes et d'un tenseur pour les matériaux anisotropes. λ s'exprime en $Wm^{-1}K^{-1}$. La conductivité thermique peut dépendre de variables internes, comme la température.
- T est la température habituellement exprimée en degrés Kelvin (K) mais compte tenu de la présence du gradient, il est également possible de l'exprimer en degrés Celsius.

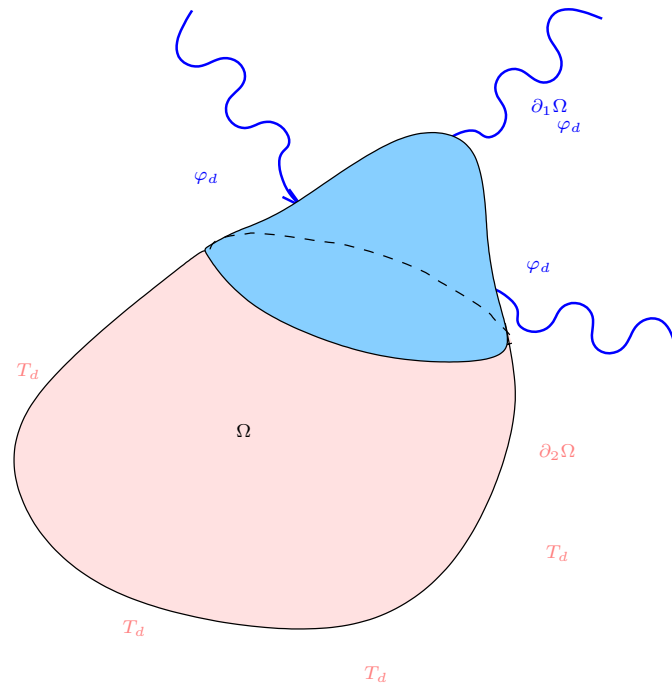


FIGURE 6.1: Structure étudiée

Dans le cas des matériaux isotropes, il en résulte que la densité de flux et le gradient de température sont colinéaires, ce qui n'est plus le cas pour les matériaux anisotropes.

6.1.3 Conditions aux limites :

La structure Ω est soumise à des échanges de chaleurs imposés par son environnement, ces échanges peuvent se classer en deux catégories :

Les échanges convectifs : Ce sont des échanges de conduction à la paroi entre la structure et un fluide (ou un gaz). Le fluide changeant de température au contact de la structure, il se dilate (ou se contracte) et change de masse volumique, ce qui se traduit par la mise en mouvement du fluide. Les échanges convectifs peuvent être modélisés de plusieurs manières :

- On modélise le fluide, dans ce cas, il faut également modéliser le mouvement du fluide à l'aide par exemple des équations de Navier Stokes. Cette modélisation demande beaucoup de soin et est en général réservée aux problèmes complexes.
- On utilise un coefficient d'échange convectif pour calculer les densités de flux à la paroi (le fluide n'est plus modélisé).

$$\vec{\varphi} \cdot \vec{n} = H(T - T_\infty)$$

où :

- $\vec{\varphi} \cdot \vec{n}$ est la densité de flux résultante appliquée à la paroi de la structure, \vec{n} est la normale sortante à la paroi.

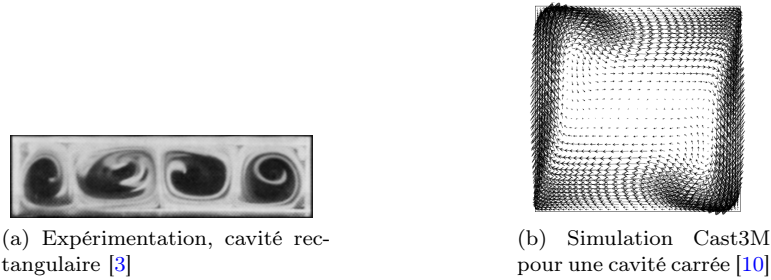


FIGURE 6.2: Mouvement convectif dans une cavité.

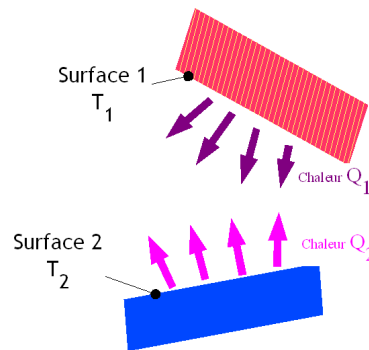


FIGURE 6.3: échanges de rayonnement (source wikipedia)

- T est la température de la paroi
- T_∞ est la température supposée du fluide loin de la paroi
- H est le coefficient d'échange convectif exprimé en $Wm^{-2}K^{-1}$, sa valeur dépend de la nature du fluide environnant, de l'orientation de la paroi par rapport à la direction de la gravité et de la présence éventuelle d'une vitesse de fluide forcée (vent). On peut obtenir une approximation de l'échange convectif en étudiant le régime supposé de l'écoulement de fluide à la paroi par l'intermédiaire de nombres adimensionnels (Nusselt, Reynolds, Prandtl). Pour plus de détails, reportez vous à votre cours de thermique ou au manuel castem sur la thermique [11]. On peut également utiliser les valeurs conventionnelles données dans la réglementation thermique pour les bâtiments dont les éléments sont rappelés sur http://www.hbsoft.be/chauffage/deperd_rt2000.html.

Les échanges radiatifs ou rayonnement : Ce sont des échanges de type électromagnétique entre deux corps. Quelque soit sa température, un corps émet un rayonnement dont la puissance peut être calculée à l'aide de la loi de Stephan Boltzmann. Un corps rayonne une puissance surfacique qui dépend de sa température T et de son indice d'émissivité ϵ :

$$\varphi_{rémise} = \sigma\epsilon T^4 (W.m^{-2})$$

où :

- σ est la constante de Stephan Boltzmann ($5,6703.10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4}$)
- $\epsilon = 1$ pour un corps noir, $0 < \epsilon < 1$ pour un corps gris

Dans le cas d'un corps à la température T échangeant avec un milieu infini considéré comme un corps noir à la température T_∞ , ce corps reçoit un flux de chaleur surfacique φ_r :

$$\varphi_r = \sigma\epsilon(T_\infty - T^4)$$

6.1.4 Bilan thermique : équation de la chaleur.

- La puissance thermique stockée est $\int_\Omega \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega$
- La puissance thermique volumique reçue est : $\int_\Omega q d\Omega$
- La puissance thermique échangée sur la surface est $\int_{\partial\Omega} \vec{\varphi} \bullet \vec{n} dS = - \int_{\partial\Omega} \lambda \overrightarrow{grad}(T) \bullet \vec{n} dS$ (\vec{n} est la normale sortante à $\partial\Omega$)

La puissance calorifique stockée est égale à la puissance volumique reçue moins la puissance échangée avec l'extérieur.

$$\int_\Omega \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = \int_\Omega q d\Omega + \int_{\partial\Omega} \lambda \overrightarrow{grad}(T) \bullet \vec{n} dS$$

En utilisant le théorème d'Ostgradski, on obtient :

$$\int_\Omega \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - q - \text{div}(\lambda \overrightarrow{grad}(T)) d\Omega = 0$$

Comme la relation est vraie quelque soit le domaine isolé, on peut en déduire qu'en tout point :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - q - \text{div}(\lambda \overrightarrow{grad}(T)) = 0$$

Bibliographie

- [1] K.J. Bathe and E.L.Wilson. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, 1976.
- [2] J.L. Batoz and Dhatt G. *Modélisation des Structures par Éléments Finis*, volume 1,2 & 3. Hermès, 1996.
- [3] M.Y. Chang, C.H. Yu, and T.F. Lin. Flow visualization and numerical simulation of transverse and mixed vortex roll formation in mixed convection of air in a horizontal flat duct. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(8) :1907–1922, 1997. cited By (since 1996)17.
- [4] G. Dhatt and G. Touzot. *Une Présentation de la Méthode des Éléments Finis*. Les presses de l’université Laval, Québec, 1981.
- [5] Joseph Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot, père et fils, 1822.
- [6] J. Garrigues. Initiation à la méthode des éléments finis <http://esm2.imt-mrs.fr/gar/ef.html>, janvier 2002.
- [7] Ernst Kirsch. Die theorie der elastizität und die bedürfnisse der festigkeitslehre. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, (42) :797–807, 1898.
- [8] P-Y Lagrée. équation de la chaleur.
- [9] Bob McGinty. Stress concentrations at holes.
- [10] H. Paillère and F. Dabbene. Initiation à la simulation numérique en mécanique des fluides à l’aide de castem2000. recueil d’exemples commentés. Technical report, Cours ENSTA MF307.
- [11] Philippe Pasquet. Thermique des structures. Technical report, CEA, 1999.
- [12] M. Prat, P. Bish, A. Millard, and G. Pijaudier-Cabot. *Emploi des Éléments Finis en Génie Civil*, volume 1,2 & 3. Hermès, 1995.
- [13] Guoxi Wu. Earthquake-induced deformation analyses of the upper san fernando dam under the 1971 san fernando earthquake earthquake-induced deformation analyses of the upper san fernando dam under the 1971 san fernando earthquake. *Canadian Geotechnical Journal*, 38 :1–15, 2001.
- [14] O.C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method*. Mc Graw Hill, 1989.

Les ouvrages cités sont disponibles à la bibliothèque universitaire.